Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2012/2013
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 9 luglio 2013

1. Mario chiede al vicino di casa di annaffiare una pianta mentre è in vacanza. Lasciata senza acqua, la pianta ha probabilità 0.8 di morire, mentre tale probabilità è di 0.15 se annaffiata. Mario stima al 90 % la sua fiducia che il vicino si ricordi di annaffiare la pianta. Si chiede:

   (i) qual'è la probabilità che la pianta sia ancora viva quando Mario torna?

   (ii) se Mario trova la pianta morta, qualè la probabilità che il vicino si sia dimenticato di annaffiarla?

Soluzione. M = la pianta muore; M^c = la pianta vive; I = la pianta è stata innaffiata; I^c = la pianta non è stata innaffiata. Abbiamo dai dati: $P(I) = 0.9$, $P(I^c) = 0.1$, $P(M|I) = 0.15$ e $P(M|I^c) = 0.8$. Si chiede: *(i)* $P(M^c)$ e *(ii)* $P(I^c|M)$.

(i) $P(M^c) = 1 - P(M)$. Per $P(M)$ usiamo il teorema delle probabilità totali: $P(M) = P(M|I)P(I) + P(M|I^c)P(I^c) = 0.15 \times 0.9 + 0.8 \times 0.1 = 0.215$; pertanto $P(M^c) = 1 - P(M) = 1 - 0.215 = 0.785$.

(ii) Per $P(I^c|M)$ usiamo la formula di Bayes:

$$P(I^c|M) = \frac{P(M|I^c)P(I^c)}{P(M)} = \frac{0.8 \times 0.1}{0.215} = 0.372$$

2. Il tempo di vita di un componente elettronico è una variabile casuale di legge

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 100 \\ 100/t^2, & t > 100, \end{cases}$$

con t espresso in ore. Qualè la probabilità che esattamente 2, su 5 esemplari di questo componente, debbano essere sostituiti nelle prime 150 ore di funzionamento, supponendo che i tempi di vita dei diversi componenti siano indipendenti?

Soluzione. Sia X_1 il tempo di vita del primo componente, X_2 del secondo, e così via. Ciascuna di queste segue la legge $f(t)$ data nel testo. La probabilità che un elemento qualsiasi si guasti prima di 150 ore è data da

$$P(X_i \leq 150) = \int_0^{150} f(t)\, dt = \int_{100}^{150} \frac{100}{t^2}\, dt = \left[-\frac{100}{t} \right]_{100}^{150} = \frac{1}{3}$$

Il numero di componenti guasti prima delle 150 ore segue allora una legge binomiale $B(n, p)$ con $n = 5$ e probabilità $p = 1/3$. La risposta alla domanda è allora

$$\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = 0.329$$

3. La precipitazione nevosa giornaliera nel mese di gennaio in una certa regione è una variabile casuale X distribuita secondo una legge normale di media $\mu = 20$ cm e deviazione standard $\sigma = 5$ cm. Qualè la probabilità che

   (i) in esattamente 2 giorni nel mese le precipitazioni nevose superino i 30 cm giornalieri?

   (ii) per 3 giorni di seguito le precipitazioni medie giornaliere siano inferiori alla media (indipendentemente da quello che succede negli altri giorni)?

   (iii) che nel mese di gennaio si accumulino almeno 6 metri e mezzo di neve?

Soluzione. Innanzitutto standardizziamo la variabile X. Abbiamo che

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

(i) la probabilità che in una data giornata le precipitazioni superino i 30 cm è data da

$$p = P(X > 30) = 1 - P(X < 30) = 1 - P(Z < (30-20)/5) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.97725 = 0.02275$$

Siccome i giorni in cui questo succede sono distribuiti secondo una legge $B(31, p)$, la risposta è

$$\binom{31}{2} p^2 (1-p)^{29} = 0.123475$$

(ii) La probabilità che in una data giornata la precipitazione nevosa sia inferiore alla media è data da

$$p = P(X < 20) = P(Z < 0) = 0.5$$

però la risposta è altamente non banale.

(iii) Indichiamo con X_1 la precipitazione del primo gennaio, con X_2 quella del 2 gennaio, e via dicendo. Dobbiamo calcolare $P(X_1 + X_2 + ... + X_n \geq 650)$, con $n = 31$. Siano

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \qquad Z = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$$

con μ e σ come dai dati. Usando l'approssimazione normale, abbiamo

$$P(X_1 + X_2 + ... + X_n \geq 650) = P\left(Z \geq \frac{650/n - 20}{5} \sqrt{n}\right)$$
$$= P(Z \geq 1.08) = 1 - P(Z < 1.08) = 1 - 0.85993 = 0.14$$

4. Si esegue un test per stabilire se, in una certa città, la statura media della popolazione dei maschi di una certa fascia di età è inferiore alla media nazionale μ_0, che è di 175 cm. Viene selezionato un campione di 10 maschi, ottenendo i seguenti risultati:

$$176.7, 173.9, 190.3, 171.1, 180.8, 175.6, 179.5, \ 162.8, 185.7, 180.9$$

Sulla base di questo campione, si può accettare, con un livello di significatività del 5%, l'ipotesi che la statura media della città sia inferiore alla media nazionale?

Soluzione. Scegliamo come ipotesi nulla $H_0 :=$ la popolazione da cui è estratto il campione ha media $\mu = \mu_0 = 175$ cm con varianza incognita. Dovremo quindi usare la distribuzione di Student ed eseguire un test unilaterale di H_0 contro l'ipotesi alternativa $H_1 :=$ la media è inferiore a μ_0, ovvero $\mu < \mu_0$. Il campione ha media campionaria $\overline{X}_n = 177.7$, varianza campionaria $S_n^2 = 59.0$ e scarto quadratico medio $S_n = 7.7$ (dopo arrotondamento ad una cifra significativa). La variabile standardizzata è

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S_n} \sqrt{n}$$

e la regione di rigetto Z è data da $Z < t_{0.05}(9) = -1.833$. Dai dati abbiamo

$$Z = \frac{177.7 - 175}{7.7} \sqrt{10} = 1.1$$

e quindi il campione conferma l'ipotesi nulla.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2012/2013
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 9 luglio 2013

1. Silvio vuol mettere alla prova un nuovo agente di cambio e gli affida 100.000 € da investire in borsa. Silvio ha il 60 % di fiducia nella bravura dell'agente. L'investimento, se fatto da un bravo agente, ha il 95 % di probabilità di fruttare, mentre è del 20 % se l'agente non è bravo. Si chiede:

   (i) qual'è la probabilità che Silvio perda tutto?

   (ii) se Silvio perde tutto, qualè la probabilità che l'agente sia impreparato?

Soluzione. F = l'investimento frutta; F^c = Silvio perde tutto; B = l'agente è bravo; B^c = l'agente non è bravo. Abbiamo dai dati: $P(B) = 0.6$, $P(B^c) = 0.4$, $P(F|B) = 0.95$ e $P(F|B^c) = 0.2$. Si chiede: *(i)* $P(F^c)$ e *(ii)* $P(B^c|F^c)$.

(i) $P(F^c) = 1 - P(F)$. Per $P(F)$ usiamo il teorema delle probabilità totali: $P(F) = P(F|B)P(B)+P(F|B^c)P(B^c) = 0.95\times 0.6+0.2\times 0.4 = 0.65$; pertanto $P(F^c) = 1-P(F) = 1 - 0.65 = 0.35$.

(ii) Per $P(B^c|F^c)$ usiamo la formula di Bayes:

$$P(B^c|F^c) = 1 - P(B|F^c) = 1 - \frac{P(F^c|B)P(B)}{P(F^c)} = 1 - \frac{(1 - P(F|B))\,P(B)}{P(F^c)} =$$
$$= 1 - \frac{0.05 \times 0.6}{0.35} = 1 - 0.086 = 0.914$$

2. Il tempo di vita di un componente elettronico è una variabile casuale di legge

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 50 \\ e^{50-t}, & t > 50, \end{cases}$$

con t espresso in ore. Qualè la probabilità che esattamente 4, su 6 esemplari di questo componente, debbano essere sostituiti nelle prime 51 ore di funzionamento, supponendo che i tempi di vita dei diversi componenti siano indipendenti?

Soluzione. Sia X_1 il tempo di vita del primo componente, X_2 del secondo, e così via. Ciascuna di queste segue la legge $f(t)$ data nel testo. La probabilità che un elemento qualsiasi si guasti prima di 51 ore è data da

$$P(X_i \leq 51) = \int_0^{51} f(t)\,dt = \int_{50}^{51} e^{50-t}\,dt = \left[-e^{50-t}\right]_{50}^{51} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63$$

Il numero di componenti guasti prima di 51 ore segue allora una legge binomiale $B(n,p)$ con $n=6$ e probabilità $p=1-1/e$. La risposta alla domanda è allora

$$\binom{6}{4} p^4 (1-p)^2 = 0.324$$

3. Un piastrellista deve pavimentare una certa superficie e ci impiega 10 giorni. L'area che riesce a pavimentare in un giorno è una variabile casuale X distribuita secondo una legge normale di media $\mu = 80\ m^2$ e deviazione standard $\sigma = 20\ m^2$. Qualè la probabilità che

   (i) ci siano due giornate, nel periodo indicato di 10 giorni, in cui il piastrellista ricopra più di $82\ m^2$?

   (ii) per 3 giorni di seguito il piastrellista ricopra aree inferiori alla media giornaliera (indipendentemente da quello che succeda negli altri giorni)?

   (iii) che nei primi cinque giorni ricopra una superficie di almeno $450\ m^2$?

Soluzione. Innanzitutto standardizziamo la variabile X. Abbiamo che

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

(i) la probabilità che in una data giornata il piastrellista ricopra più di $82\ m^2$ è data da

$$p = P(X>82) = 1-P(X<82) = 1-P(Z<(82-80)/20) = 1-P(Z<0.1) = 1-0.5398 = 0.4602$$

Siccome i giorni in cui questo succede sono distribuiti secondo una legge $B(10,p)$, la risposta è

$$\binom{10}{2} p^2 (1-p)^8 = 0.069$$

(ii) La probabilità che in una data giornata il piastrellista ricopra un'area inferiore alla media è data da

$$p = P(X<80) = P(Z<0) = 0.5,$$

però la risposta è altamente non banale.

(iii) Indichiamo con X_1 la copertura del primo giorno, con X_2 quella del secondo giorno, e via dicendo. Dobbiamo calcolare $P(X_1+X_2+...+X_n \geq 450)$, con $n=5$. Siano

$$\overline{X}_n = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} \qquad Z = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

con μ e σ come dai dati. Usando l'approssimazione normale, abbiamo

$$\begin{aligned} P(X_1+X_2+...+X_n \geq 450) &= P\left(Z \geq \frac{450/n-80}{20}\sqrt{n}\right) \\ &= P(Z\geq 1.12) = 1-P(Z<1.12) = 1-0.8686 = 0.1314 \end{aligned}$$

4. Il reddito medio pro-capite annuale della popolazione italiana è di 18 mila €. In una certa regione, si pensa che il valore sia più alto rispetto alla media nazionale, e quindi si esegue un test su un campione di 10 individui ottenendo i seguenti risultati (in migliaia di €):

$$31.0,\ 19.3,\ 20.9,\ 22.7,\ 17.0,\ 14.9,\ 25.2,\ 17.4,\ 20.1,\ 24.0$$

Sulla base di questo campione, si può accettare, con un livello di significatività del 5%, l'ipotesi che il reddito pro-capite medio in quella regione sia superiore alla media nazionale?

Soluzione. Scegliamo come ipotesi nulla $H_0 :=$ la popolazione da cui è estratto il campione ha reddito medio $\mu = \mu_0 = 18$ mila € con varianza incognita. Dovremo quindi usare la distribuzione di Student ed eseguire un test unilaterale di H_0 contro l'ipotesi alternativa $H_1 :=$ la media è superiore a μ_0, ovvero $\mu > \mu_0$. Il campione ha media campionaria $\overline{X}_n = 21.2$, varianza campionaria $S_n^2 = 22.1$ e scarto quadratico medio $S_n = 4.7$ (dopo arrotondamento ad una cifra significativa). La variabile standardizzata è

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S_n}\sqrt{n}$$

e la regione di rigetto Z è data da $Z > t_{0.95}(9) = 1.833$. Dai dati abbiamo

$$Z = \frac{21.2 - 18}{4.7}\sqrt{10} = 2.2$$

e quindi il campione non conferma l'ipotesi nulla.