Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale
Sede di Fermo
Anno Accademico 2010/2011
Probabilità e Statistica

Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 1 marzo 2011

1. La mortalità di una certa malattia è di uno su diecimila. Calcolare la probabilità che, su 6 ammalati,
   (i) nessuno muoia;
   (ii) uno muoia;
   (iii) almeno uno muoia;
   (iv) tutti muoiano.

2. La legge individuata dalla densità
$$f(t) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |t|}$$
   è detta *Legge di Laplace* di parametro λ.
   (i) Mostrare che f è una densità di probabilità;
   (ii) calcolare media e varianza della legge di Laplace;
   (iii) Se X è una variabile aleatoria con legge di Laplace di parametro λ, quali sono le leggi delle variabili αX e $|X|$?

3. In una schedina del totocalcio a 13 partite i tre simboli 1, X e 2 compaiono con probabilità 0.46, 0.28 e 0.26 rispettivamente. Calcolare la probabilità che in una schedina
   (i) il 2 compaia più di 3 volte;
   (ii) il simbolo X non compaia mai.

4. La polizia stradale misura la velocità delle automobili che transitano in un determinato punto della strada, dove il limite di velocità è di 50 km/h. Un gruppo di venti misurazioni fornisce i seguenti risultati:

   50.13, 48.27, 51.91, 52.66, 50.23, 51.28, 51.18, 52.35, 52.3, 51.96,
   50.58, 48.33, 51.79, 49.4, 50.12, 50.03, 50.9, 51.99, 48.52, 51.17

   Stabilire se questi dati confermano con un livello di significatività del 5% l'affermazione che le automobili hanno una velocità media non superiore a 50 km/h.

1) X = numero di morti su n ammalati

$X \sim B(n,p)$ con $n=6$ e $p=10^{-4}$

(i) $P(\{X=0\}) = B(6,10^{-4})(0) = \binom{6}{0}(10^{-4})^0(1-10^{-4})^6 = 0.9994$

(ii) $P(\{X=1\}) = B(6,10^{-4})(1) = \binom{6}{1}\, 10^{-4}(1-10^{-4})^5 = 0.0005997$

(iii) $\sum_{j=1}^{n} P(\{X=j\}) = 1-P(\{X=0\}) = 0.00059985$

(iv) $P(\{X=6\}) = B(6,10^{-4})(6) = \binom{6}{6}(10^{-4})^6(1-10^{-4})^0 = 10^{-24}$

---

2) $f(t) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|t|}$ per X la v.a.

(i) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{\lambda}{2}\cdot 2\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,dt = \lambda \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\Big|_0^{\infty} = 1$

(ii) $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = 0$

$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = \lambda\int_0^{\infty} t^2 e^{-\lambda t}\,dt = \lambda\left\{ \cancel{\frac{t^2 e^{-\lambda t}}{-\lambda}\Big|_0^{\infty}} + \frac{1}{\lambda}2\int_0^{\infty} t e^{-\lambda t}dt\right\}$

$= \lambda\cdot\frac{2}{\lambda}\left\{ \cancel{t\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\Big|_0^{\infty}} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt\right\} = \frac{2}{\lambda}\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda^2}$

$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2}$

(iii) $\underline{\alpha>0}$ $P(\{\alpha X \le t\}) = P(\{X \le \frac{t}{\alpha}\}) = F_X(\frac{t}{\alpha})$

$g(t) = F'_{\alpha X}(t) = \frac{1}{\alpha}F'_X(\frac{t}{\alpha}) = \frac{\lambda}{2\alpha} e^{-\frac{\lambda}{\alpha}|t|}$

$\underline{\alpha<0}$ $P(\{\alpha X \le t\}) = P(\{X \ge \frac{t}{\alpha}\}) = 1-P(\{X \le \frac{t}{\alpha}\}) = 1-F_X(\frac{t}{\alpha})$

$g(t) = -\frac{1}{\alpha} f(\frac{t}{\alpha}) = -\frac{\lambda}{2\alpha} e^{-\frac{\lambda}{|\alpha|}|t|}$

$\forall\alpha$ $g(t) = f(\frac{\lambda}{|\alpha|})$

$$P(\{|X| \le t\}) = P(\{-t \le X \le t\}) = P(\{X \le t\}) - P(\{X \le -t\}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} f(y)\,dy - \int_{-\infty}^{-t} f(y)\,dy = \int_{-t}^{t} f(y)\,dy = \lambda \int_0^t e^{-\lambda y}\,dy = 1 - e^{-\lambda t}$$

---

3) Y = numero di volte con cui compare il 2

Z = " " X

$Y \sim B(13, 0.26)$ e $Z \sim B(13, 0.28)$

(i) $P(\{Y > 3\}) = \sum_{j=4}^{13} \binom{13}{j} (0.26)^j (0.74)^{13-j} =$

$$= 1 - P(\{Y \le 3\}) = 1 - \sum_{j=0}^{3} \binom{13}{j} (0.26)^j (0.74)^{13-j} = 0.45$$

(ii) $P(\{Z = 0\}) = \binom{13}{0} (0.28)^0 (0.72)^{13} = 0.014$

---

4) $E[v] = 50.755 = \bar{X}$ $s^2 = 1.84763$

H_0 = velocità media = 50 km/h $s = 1.35927$

H_1 = " > 50 "

$T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \rightarrow = 2.48402$ $t_{0.05}(19) = 1.729$

Regione di rifiuto

H_0 rifiutata $T > 1.729$

(al 5%)