1

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Informatica
Anno Accademico 2016/2017
Meccanica Razionale

Nome ....
N. Matricola ....

Ancona, 22 aprile 2017

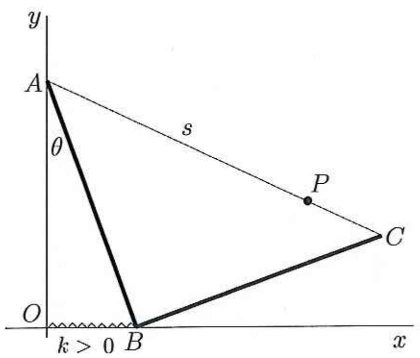
1. Un corpo rigido è formato da due aste AB e BC, di ugual lunghezza L e masse rispettivamente M_1 ed M_2, saldate ad angolo retto nell'estremo comune B. Il corpo si muove nel piano verticale $O(x,y)$ (vedi figura) con l'estremo comune B vincolato a scorrere senza attrito sull'asse x e l'estremo A a scorrere senza attrito sull'asse y. Un punto P di massa m è inoltre vincolato a scorrere senza attrito sul segmento (privo di massa) AC. Infine, una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto B con l'origine O. Introdotti i parametri

$$\lambda = \frac{M_2 - M_1}{m} \qquad \mu = \frac{k\,L\sqrt{2}}{m\,g}$$

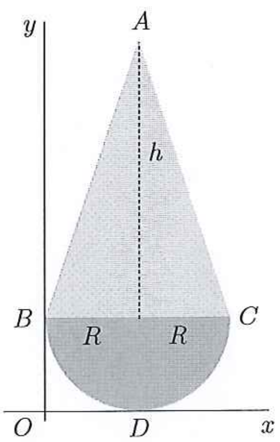
e scegliendo come coordinate lagrangiane gli angoli $\theta = \widehat{OAB}$ ed s (la distanza di P da A) mostrati in figura, si chiede di:

   - scrivere l'energia potenziale del sistema;
   - determinare le configurazioni di equilibrio in funzione di λ e μ e scrivere la relazione cui devono soddisfare λ e μ affinchè il punto P si trovi, all'equilibrio, all'interno del segmento AC;
   - determinare le reazioni vincolari all'equilibrio.

2. Una lamina piana non omogenea di massa M è costituita da un triangolo isoscele ABC di altezza h e base $2\,R$ e da un semicerchio BCD (vedi figura) di raggio R; la massa del semicerchio è doppia della massa del triangolo. Calcolare la matrice d'inerzia della lamina nel sistema solidale $O(x,y,z)$ mostrato in figura, con l'asse x tangente al semicerchio in D e l'asse y tangente al semicerchio in B (vedi figura).



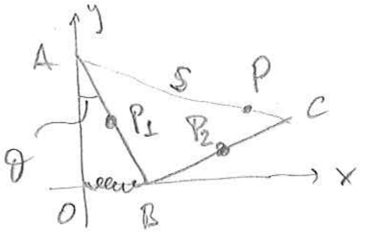
Problema 1



Problema 2

Compito 1

Esercizio 1.



$$V = M_1 y_{P_1} + M_2 y_{P_2} + m g_{P} + \frac{1}{2} k \overline{OB}^2$$

$$y_{P_1} = \frac{L}{2}\cos\vartheta \qquad B-O = L\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

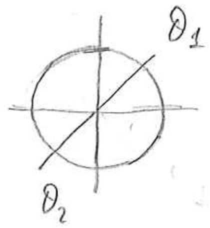
$$y_{P_2} = \frac{L}{2}\sin\vartheta$$

$$P-O = P-A+A-O = s\left\{\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\left(\vartheta+\frac{\pi}{4}\right) - \hat{\jmath}\cos\left(\vartheta+\frac{\pi}{4}\right)\right\} + L\hat{\jmath}\cos\vartheta$$

$$V = g\frac{L}{2}\left(M_1\cos\vartheta + M_2\sin\vartheta\right) + mg\left[L\cos\vartheta - s\cos\left(\vartheta+\frac{\pi}{4}\right)\right] + \frac{1}{2}kL^2\,\mathrm{sen}^2\vartheta$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial s} = mg\cos\left(\vartheta+\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \dfrac{\partial V}{\partial \vartheta} = g\dfrac{L}{2}\left(M_2\cos\vartheta - M_1\sin\vartheta\right) + mg\left[s\,\mathrm{sen}\left(\vartheta+\dfrac{\pi}{4}\right) - L\sin\vartheta\right] + kL^2\,\mathrm{sen}\vartheta\cos\vartheta \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0 \implies \cos\left(\vartheta+\frac{\pi}{4}\right) = 0 \qquad \vartheta + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{2} \quad \Big< \begin{array}{l} \vartheta_1 = \frac{\pi}{4} \\ \vartheta_2 = -\frac{3}{4}\pi \end{array}$$



$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{per } \vartheta = \vartheta_1: \quad \frac{L}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(M_2 - M_1\right)g + \qquad \left(=\frac{5}{4}\pi\right)$$

$$+ mg\left[s - L\frac{\sqrt{2}}{2}\right] + kL^2\frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{L\sqrt{2}}{4}\lambda + s - L\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{kL^2}{2mg} = 0 \qquad s + \frac{L\sqrt{2}}{4}(\lambda - 2) + L\frac{\mu}{2\sqrt{2}} = 0$$

$$s = L\sqrt{2}\left(\frac{\mu}{4} - \frac{\lambda-2}{4}\right) = L\sqrt{2}\,\frac{2+\mu-\lambda}{4} = s_1$$

$$0 \le s \le L\sqrt{2} \implies 0 \le \frac{2+\mu-\lambda}{4} \le 1$$

$$0 \le 2+\mu-\lambda \le 4 \qquad -2 \le \mu - \lambda \le 2 \qquad \boxed{\mu - 2 \le \lambda \le \mu + 2}$$

$$\text{Per } \vartheta = \vartheta_2: \quad g\frac{L}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(M_1 - M_2\right) + mg\left(-s + L\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{kL^2}{2} = 0$$

$$-\frac{L\sqrt{2}}{4}\lambda - s + L\frac{\sqrt{2}}{2} + L\frac{\mu}{2\sqrt{2}} = 0 \qquad s = L\sqrt{2}\left(\frac{\mu}{4} + \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{2}\right) =$$

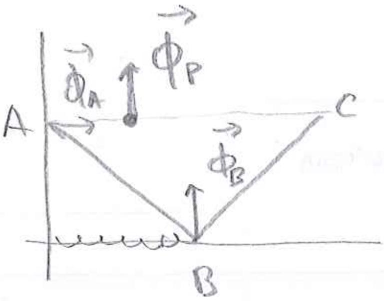
$$= L\sqrt{2}\,\frac{\mu+\lambda-2}{4} = s_2$$

$$0 \le s \le L\sqrt{2} \implies 0 \le \frac{\mu+\lambda-2}{4} \le 1$$

$$2 \le \mu+\lambda \le 6 \qquad \boxed{2-\mu \le \lambda \le 6-\mu}$$

Reazioni vincolari

$\theta = \theta_1$:



$$\vec{\phi}_A = \phi_A \hat{\imath}$$

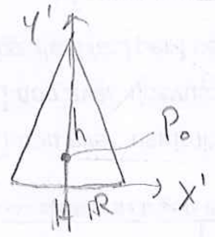
$$\vec{\phi}_B = \phi_B \hat{\jmath}$$

$$\vec{\phi}_P = \phi_P \hat{\jmath}$$

$$\begin{cases} \phi_A - kL\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \phi_P - mg = 0 \\ \phi_B - \phi_P - (M_1+M_2)g = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \phi_A = kL\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \phi_P = mg \\ \phi_B = (M_1+M_2+m)g \end{cases}$$

$\theta = \theta_2$ lo stesso

Esercizio 2.



$$\overline{P_0 H} = \frac{1}{Rh} 2\int_0^R dx \int_0^{\frac{h}{R}(R-x)} dy\, y = \frac{2}{Rh}\int_0^R dx \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{(R-x)^2}{2} = \frac{1}{Rh}\left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{R^3}{3} = \frac{1}{3}h$$

Triangolo in $H(x', y')$:

$$I_{11} = 2\sigma \int_0^R dx \int_0^{\frac{h}{R}(R-x)} dy\, y^2 = 2\sigma\int_0^R dx\, \frac{1}{3}\left(\frac{h}{R}\right)^3 (R-x)^3 = \frac{2}{3}\sigma\left(\frac{h}{R}\right)^3 \frac{R^4}{4} = \frac{1}{6}\frac{m_T}{Rh} h^3 R = \frac{1}{6} m_T h^2$$

$$I_{22} = 2\sigma\int_0^R dx \int_0^{\frac{h}{R}(R-x)} dy\, x^2 = 2\sigma\int_0^R dx\, x^2 \frac{h}{R}(R-x) =$$

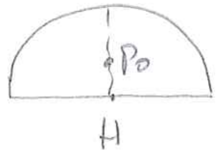
$$= 2\sigma \frac{h}{R}\left[R\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{1}{6} m_T R^2 \qquad I_{33} = \frac{1}{6} m_T (R^2 + h^2)$$

Triangolo in $O(x, y)$: $I_{11} = \frac{1}{6}m_T h^2 - m_T\left(\frac{1}{3}h\right)^2 + m_T\left(R + \frac{1}{3}h\right)^2 = \frac{1}{18} m_T h^2 + m_T\left(R+\frac{1}{3}h\right)^2$

$$I_{22} = \frac{1}{6}m_T R^2 + m_T R^2 = \frac{7}{6} m_T R^2 \qquad I_{33} = I_{11} + I_{22}$$

$$I_{12} = 0 - m_T R\left(R + \frac{h}{3}\right) = -m_T R\left(R+\frac{h}{3}\right)$$

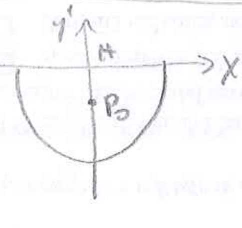
Semicerchio



$$\overline{HP_0} = \frac{1}{\pi R^2/2}\int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{R} d\rho\,\rho\,\rho\sin\vartheta =$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\,\frac{R^3}{3}\cdot 2 = \frac{4R}{3\pi} \equiv d$$

Semicerchio in $H(x',y')$



$$I_{11} = \sigma\int_{\pi}^{2\pi} d\vartheta \int_0^{R} d\rho\,\rho\,(\rho\sin\vartheta)^2 = \sigma\int_{\pi}^{2\pi}\sin^2\vartheta\,d\vartheta\,\frac{R^4}{4} =$$

$$= \sigma\,\frac{\pi}{2}\,\frac{R^4}{4} = \frac{1}{4} m_c R^2 = I_{22} \qquad I_{33} = \frac{1}{2} m_c R^2$$

Semicerchio in $O(x,y)$

$$I_{11} = \frac{1}{4} m_c R^2 - m_c d^2 + m_c (R-d)^2 = \frac{5}{4} m_c R^2 + 2 m_c R d$$

$$I_{22} = \frac{1}{4} m_c R^2 + m_c R^2 = \frac{5}{4} m_c R^2 \qquad I_{33} = I_{11} + I_{22}$$

$$I_{12} = 0 - m_c R\left(R - \frac{4R}{3\pi}\right)$$

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}_{triangolo} + \underline{\underline{I}}_{semicerchio} \quad \text{con} \quad m_T = \frac{1}{3} M \qquad m_c = \frac{2}{3} M$$

2

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Informatica
Anno Accademico 2016/2017
Meccanica Razionale

Nome ....

N. Matricola ....

Ancona, 22 aprile 2017

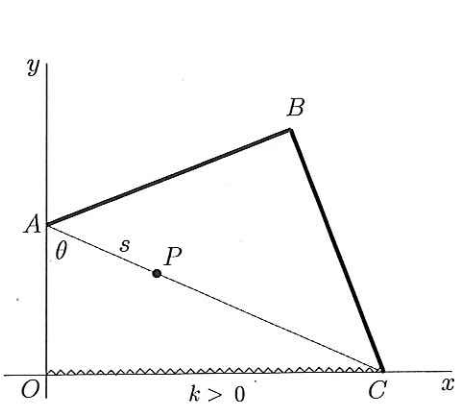
1. Un corpo rigido è formato da due aste AB e BC, di ugual lunghezza L e masse rispettivamente M_1 ed M_2, saldate ad angolo retto nell'estremo comune B. Il corpo si muove nel piano verticale $O(x, y)$ (vedi figura) con l'estremo A vincolato a scorrere senza attrito sull'asse y e l'estremo C a scorrere senza attrito sull'asse x. Un punto P di massa m è inoltre vincolato a scorrere senza attrito sul segmento (privo di massa) AC. Infine, una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto C con l'origine O. Introdotto il parametro

$$\lambda = 4 - \frac{M_2 - M_1}{m}$$

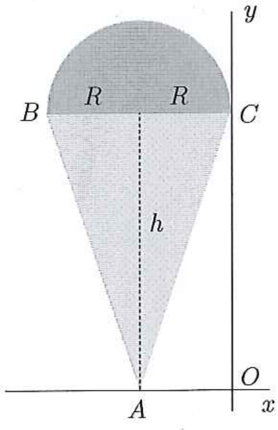
e scegliendo come coordinate lagrangiane gli angoli $\theta = \cancel{\widehat{HBC}}$ $\widehat{OAC}$ ed s (la distanza di P da A) mostrati in figura, si chiede di:

- scrivere l'energia potenziale del sistema;
- determinare le configurazioni di equilibrio in funzione di λ e scrivere la relazione cui deve soddisfare λ affinchè il punto P si trovi, all'equilibrio, all'interno del segmento AC;
- determinare le reazioni vincolari all'equilibrio.

2. Una lamina piana non omogenea di massa M è costituita da un triangolo isoscele ABC di altezza h e base $2R$ e da un semicerchio di diametro $BC = 2R$ (vedi figura); la massa del semicerchio è doppia della massa del triangolo. Calcolare la matrice d'inerzia della lamina nel sistema solidale $O(x, y, z)$ mostrato in figura, con l'asse x passante per A e parallelo alla base BC e l'asse y tangente al semicerchio in C (vedi figura).



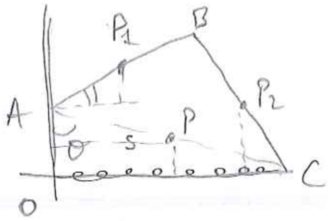
Problema 1



Problema 2

Compito (2)

Esercizio 1.



$$V = M_1 g\, y_{P_1} + M_2 g\, y_{P_2} + m g\, y_P + \frac{1}{2} k\, \overline{OC}^2$$

$$y_{P_1} = y_A + \frac{L}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = L\sqrt{2}\cos\theta + \frac{L}{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y_{P_2} = \frac{L}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{L}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \frac{L}{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y_P = y_A - s\cos\theta = (L\sqrt{2} - s)\cos\theta$$

$$V = M_1 g\left[L\sqrt{2}\cos\theta + \frac{L}{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right] + M_2 g\,\frac{L}{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + m g\,(L\sqrt{2} - s)\cos\theta + \frac{1}{2} k\,(L\sqrt{2}\sin\theta)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -m g\cos\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = M_1 g L\left[\frac{1}{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin\theta\right] - M_2 g\,\frac{L}{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + m g\,(s - L\sqrt{2})\sin\theta + 2kL^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0 \implies \cos\theta = 0 \qquad \theta = \begin{cases} \pi/2 \equiv \theta_1 \\ -\pi/2 \equiv \theta_2 \end{cases}$$

$$\theta_1: \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \implies M_1 g L\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2}\right) - M_2 g\,\frac{L}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + m g\,(s - L\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$-L\left(\frac{3M_1 + M_2}{4m}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}(s - L\sqrt{2}) = 0$$

$$s - L\sqrt{2} - L\sqrt{2}\,\frac{4M_1 + M_2 - M_1}{4m} = 0$$

$$s - L\sqrt{2}\,\frac{4m + 4M_1 + M_2 - M_1}{4m} = 0$$

$$s - L\sqrt{2}\,\frac{m + M_1}{m} - \frac{\lambda}{4} = 0 \qquad s = L\sqrt{2}\left(\frac{m + M_1}{m} + \frac{\lambda}{4}\right)$$

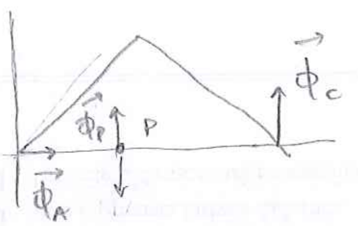
$$0 \le s \le L\sqrt{2} \implies 0 \le \frac{m + M_1}{m} + \frac{\lambda}{4} \le 1$$

$$\theta_2: \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \implies M_1 g L\left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2}\right) + M_2 g\,\frac{L}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - m g\,(s - L\sqrt{2}) = 0$$

$$M_1 L\,\frac{3}{4}\sqrt{2} + M_2 L\,\frac{\sqrt{2}}{4} - m(s - L\sqrt{2}) = 0$$

$$s - L\sqrt{2} = \frac{3M_1 + M_2}{4m} L \qquad \boxed{\text{ETC.}}$$

Reazioni vincolari

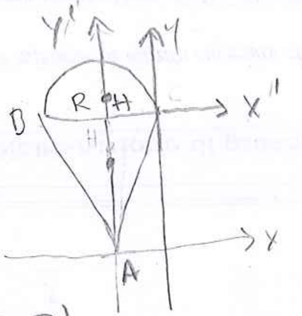


$$\vec{\Phi}_A = +kL\sqrt{2}\,\hat{i}$$

$$\vec{\Phi}_P = mg\,\hat{j}$$

$$\vec{\Phi}_C = \left[mg + (M_1+M_2)g\right]\hat{j}$$

Esercizio 2.



$\overline{HP_0} = \frac{1}{3}h$ triangolo

$\overline{HP_0} = \frac{4R}{3\pi}$ semicerchio (v. compito ①)

Triangolo:

$$I_{11} = 2\sigma\int_{-R}^{0} dx \int_{\frac{h}{R}(x+R)}^{h} dy\, y^2 = (*)$$

$$(*) = 2\sigma\int_{-R}^{0} dx\, \frac{1}{3}\left[h^3 - \frac{h^3}{R^3}(x+R)^3\right] = \frac{2}{3}\sigma\left\{h^3R - \frac{h^3}{R^3}\left.\frac{(x+R)^4}{4}\right|_{-R}^{0}\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\sigma h^3\left\{R - \frac{R}{4}\right\} = \frac{1}{2}m_T h^2$$

$$I_{22} = \sigma\int_{-2R}^{-R} dx \int_{-\frac{h}{R}(x+R)}^{h} dy\, x^2 + \sigma\int_{-R}^{0} dx \int_{\frac{h}{R}(x+R)}^{h} dy\, x^2 = \sigma\int_{-2R}^{-R} dx\, x^2 h\left(1 + \frac{x+R}{R}\right) +$$

$$+\sigma\int_{-R}^{0} dx\, x^2 h\left(\cancel{1} - \frac{x+R}{R}\right) = \sigma h\left\{\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4R} + \frac{x^3}{3}\right]_{-2R}^{-R}\right\} +$$

$$+\sigma h\left\{\left[-\frac{x^4}{4R}\right]_{-R}^{0}\right\} = \sigma h\left\{2\left(\frac{8R^3}{3} - \frac{R^3}{3}\right) + \frac{R^4 - 16R^4}{4R}\right\} + \sigma h\left(\frac{R^4}{4R}\right) =$$

$$= \sigma h\left\{\frac{14}{3} - \frac{15}{4} + \frac{1}{4}\right\}R^3 = \sigma h\,\frac{14}{12}R^3 = \frac{7}{6}m_T R^2$$

$$I_{33} = \frac{1}{2}m_T\left(h^2 + \frac{7}{3}R^2\right)$$

$$I_{12} = 0 + m_T R\,\frac{2}{3}h = \frac{2}{3}m_T R h$$

Semicerchio in $H(x', y')$

$$I_{11} = \sigma \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^R d\rho\, \rho (\rho \operatorname{sen}\vartheta)^2 = \sigma \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta\, \frac{R^4}{4} = \sigma \frac{\pi}{2} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{4} m_c R^2$$

$$I_{22} = I_{11} = \frac{1}{4} m_c R^2 \qquad I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{1}{2} m_c R^2 \qquad I_{12} = 0$$

Nel sistema $O(x, y)$: $\quad I_{11} = \frac{1}{4} m_c R^2 + m_c \left(h + \frac{4R}{3\pi}\right)^2$

$$I_{22} = \frac{1}{4} m_c R^2 + m_c R^2 = \frac{5}{4} m_c R^2 \qquad I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{3}{2} m_c R^2 + m_c \left(h + \frac{4R}{3\pi}\right)^2$$

$$I_{12} = 0 + m_c R \left(h + \frac{4R}{3\pi}\right)$$

$$\underline{\underline{I}}_{TOT} = \underline{\underline{I}}_{triangolo} + \underline{\underline{I}}_{semicerchio} \qquad \text{con} \quad m_T = \frac{1}{3} M, \quad m_c = \frac{2}{3} M.$$

3

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Informatica
Anno Accademico 2016/2017
Meccanica Razionale

Nome ....

N. Matricola ....   Ancona, 22 aprile 2017

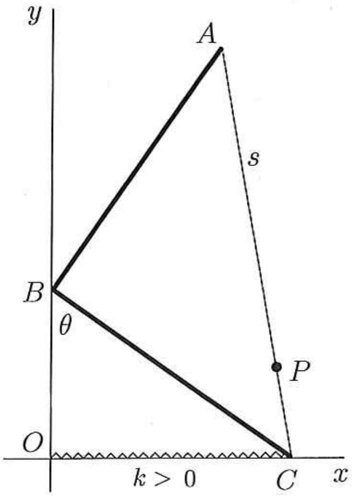
1. Un corpo rigido è formato da due aste AB e BC, di ugual lunghezza L e masse rispettivamente M_1 ed M_2, saldate ad angolo retto nell'estremo comune B. Il corpo si muove nel piano verticale $O(x,y)$ (vedi figura) con l'estremo B vincolato a scorrere senza attrito sull'asse y e l'estremo C a scorrere senza attrito sull'asse x. Un punto P di massa m è inoltre vincolato a scorrere senza attrito sul segmento (privo di massa) AC. Infine, una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto C con l'origine O. Introdotti i parametri

$$\lambda = \frac{3\,M_1 + M_2}{m} \qquad \mu = \frac{k\,L\sqrt{2}}{m\,g}$$

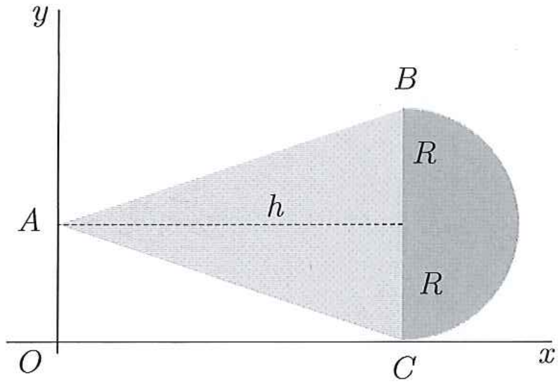
e scegliendo come coordinate lagrangiane gli angoli $\theta = \cancel{\widehat{OAB}}\ \widehat{OBC}$ ed s (la distanza di P da A) mostrati in figura, si chiede di:

- scrivere l'energia potenziale del sistema;
- determinare le configurazioni di equilibrio in funzione di λ e scrivere la relazione cui deve soddisfare λ affinchè il punto P si trovi, all'equilibrio, all'interno del segmento AC;
- determinare le reazioni vincolari all'equilibrio.

2. Una lamina piana non omogenea di massa M è costituita da un triangolo isoscele ABC di altezza h e base $2\,R$ e da un semicerchio di diametro $BC = 2\,R$ (vedi figura); la massa del semicerchio è doppia della massa del triangolo. Calcolare la matrice d'inerzia della lamina nel sistema solidale $O(x,y,z)$ mostrato in figura, con l'asse y passante per A e parallelo alla base BC e l'asse x tangente al semicerchio in C (vedi figura).



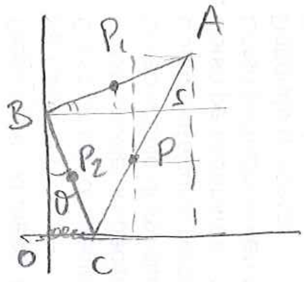
Problema 1



Problema 2

Compito 3

Esercizio 1.



$$V = M_1 g y_{P_1} + M_2 g y_{P_2} + mg y_P + \frac{1}{2} k \overline{OC}^2$$

$$y_{P_1} = L\cos\vartheta + \frac{L}{2}\sin\vartheta \qquad y_{P_2} = \frac{L}{2}\cos\vartheta$$

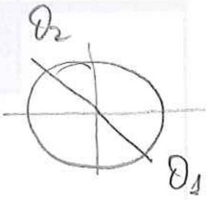
$$y_P = y_A - s\cos\left(\frac{\pi}{4}-\vartheta\right) = L\cos\vartheta + L\sin\vartheta - s\cos\left(\frac{\pi}{4}-\vartheta\right)$$

$$V = M_1 g L\left(\cos\vartheta + \frac{1}{2}\sin\vartheta\right) + M_2 g \frac{L}{2}\cos\vartheta + mg\left[L(\cos\vartheta+\sin\vartheta) - s\cos\left(\frac{\pi}{4}-\vartheta\right)\right] + \frac{1}{2}kL^2\sin^2\vartheta$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\vartheta\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = M_1 g L\left(\frac{1}{2}\cos\vartheta - \sin\vartheta\right) - M_2 g \frac{L}{2}\sin\vartheta + mg\left[L(\cos\vartheta - \sin\vartheta) - s\sin\left(\frac{\pi}{4}-\vartheta\right)\right] + kL^2\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}-\vartheta\right) = 0 \qquad \frac{\pi}{4}-\vartheta = \pm\frac{\pi}{2} \quad \begin{cases} \vartheta_1 = -\frac{\pi}{4} \\ \vartheta_2 = \frac{3}{4}\pi \end{cases}$$



$$\vartheta_1 : \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0 \Rightarrow M_1 g L \frac{\sqrt{2}}{4}(1+2) + M_2 g \frac{L}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + mg\left[L\sqrt{2} - s\right] - kL^2\frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{3M_1+M_2}{4} gL\sqrt{2} + mg(L\sqrt{2}-s) - \frac{kL^2}{2} = 0$$

$$\frac{\lambda}{4}L\sqrt{2} + L\sqrt{2} - s - \frac{\mu}{2\sqrt{2}}L = 0 \qquad s = L\sqrt{2}\left(1+\frac{\lambda}{4}-\frac{\mu}{4}\right) = L\sqrt{2}\,\frac{4+\lambda-\mu}{4}$$

$$0 \le s \le L\sqrt{2} \Rightarrow 0 \le \frac{4+\lambda-\mu}{4} \le 1 \qquad 0 \le 4+\lambda-\mu \le 4$$

$$\boxed{0 \le \lambda \le \mu}$$

Attenzione: $\lambda > 0$ sempre
$\mu > 0$

$\theta_2: \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow M_1 g L \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right) - M_2 g \frac{L}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + mg\left[-L\sqrt{2} + s\right] - \frac{kL^2}{2} = 0$

$-(3M_1 + M_2) g \frac{L\sqrt{2}}{4} + mg(s - L\sqrt{2}) - \frac{kL^2}{2} = 0$

$-\frac{\lambda}{4} L\sqrt{2} + s - L\sqrt{2} - \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sqrt{2}} = 0$

$s = L\sqrt{2}\left(1 + \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4}\right) = L\sqrt{2}\ \frac{4+\lambda+\mu}{4}$

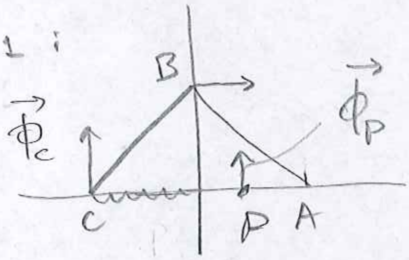
$0 \leq s \leq L\sqrt{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{4+\lambda+\mu}{4} \leq 1$

$0 \leq 4+\lambda+\mu \leq 4$ Attenzione: $\lambda+\mu > 0$ sempre

quindi $4+\lambda+\mu \leq 4$ mai verificato

Reazioni vincolari

θ_1:

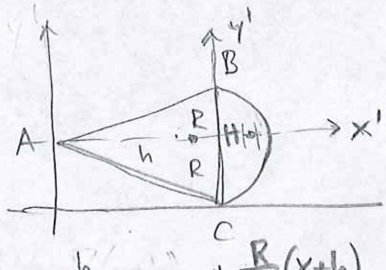


$\vec{\Phi}_P = mg\,\hat{j}$

$\vec{\Phi}_C = (M_1 + M_2 + m) g\,\hat{j}$

$\vec{\Phi}_B = kL\frac{\sqrt{2}}{2}\,\hat{i}$

Esercizio 2.



$\overline{P_0H} = \frac{h}{3}$ triangolo

$\overline{P_0H} = \frac{4R}{3\pi}$ semicerchio

Triangolo: $I_{11} = \sigma \int_0^h dx \int_{-\frac{R}{h}(x-h)}^{\frac{R}{h}(x+h)} dy\, y^2 = \sigma \int_0^h dx\, \frac{1}{3}\left[y^3\right]_{-\frac{R}{h}(x-h)}^{\frac{R}{h}(x+h)} =$

$= \frac{\sigma}{3}\int_0^h dx \left(\frac{R}{h}\right)^3 \left[(x+h)^3 + (x-h)^3\right] =$

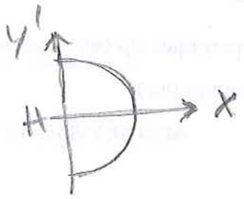
$= \frac{\sigma}{3}\left(\frac{R}{h}\right)^3 \int_0^h dx\,(2x^3 + 6xh^2) = \frac{\sigma}{3}\left(\frac{R}{h}\right)^3\left(\frac{h^4}{2} + 6\frac{h^4}{2}\right) =$

$= \frac{\sigma R^3}{3}\frac{7h}{2} = \frac{7}{6} m_T R^2$

$$I_{22} = \sigma \int_0^h dx \int_{-\frac{R}{h}(x-h)}^{\frac{R}{h}(x+h)} dy\, x^2 = \sigma \int_0^h dx\, x^2 \frac{R}{h} 2x = \sigma \frac{R}{h} \frac{h^4}{2} = \frac{1}{2} m_T h^2$$

$$I_{33} = m_T \left(\frac{7}{6} R^2 + \frac{1}{2} h^2 \right) \qquad I_{12} = 0 - m_T R \frac{2}{3} h = -\frac{2}{3} m_T R h$$

<u>Semicerchio in $H(x', y')$</u>



$$I_{11} = \sigma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^R d\rho\, \rho\, (\rho \operatorname{sen} \theta)^2 = \sigma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta\, \frac{R^4}{4} = \sigma \frac{\pi}{2} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{4} m_c R^2$$

$$I_{22} = I_{11} = \frac{1}{4} m_c R^2 \qquad I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{1}{2} m_c R^2$$

<u>Semicerchio in $O(x, y)$</u>

$$I_{11} = \frac{1}{4} m_c R^2 + m_c R^2 = \frac{5}{4} m_c R^2$$

$$I_{22} = \frac{1}{4} m_c R^2 - m_c \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 + m_c \left(h + \frac{4R}{3\pi} \right)^2$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{3}{2} m_c R^2 - m_c \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 + m_c \left(h + \frac{4R}{3\pi} \right)^2$$

$$I_{12} = 0 - m_c R \left(h + \frac{4R}{3\pi} \right)$$

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}_{\text{triangolo}} + \underline{\underline{I}}_{\text{semicerchio}} \quad \text{con} \quad m_T = \frac{1}{3} M \quad m_c = \frac{2}{3} M$$