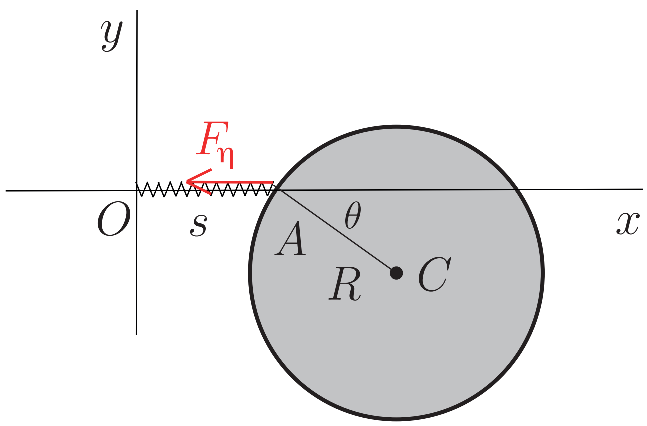
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2022/2023
Meccanica Razionale - Appello del 9/2/2023

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 9 febbraio 2023

1. (12 punti) Un disco omogeneo di raggio R, centro C e massa M si muove nel piano verticale $O(x, y)$. Il punto A del bordo è libero di scorrere sull'asse x ed è collegato all'origine O da una molla di costante elastica $k > 0$. Il disco è libero di ruotare attorno ad A ed infine una forza viscosa di costante $\eta > 0$ agisce su A. Utilizzando le coordinate lagrangiane θ (angolo di AC con l'asse x) e s (ascissa di A) come in figura si chiede di scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema.



$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$C - O = (s + R\cos\theta)\,\hat{i} - R\,\hat{j}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\vec{v}_c = (\dot{s} - R\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\hat{i} - R\,\hat{j}\,\dot{\theta}\cos\theta$$

$$v_c^2 = \dot{s}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{s}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$T = \frac{1}{2}M\left\{\dot{s}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{s}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}R^2\dot{\theta}^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}M\left\{\dot{s}^2 + \frac{3}{2}R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{s}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right\}$$

$$V = -MgR\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{2}k\,s^2$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$Q_s = \vec{F}_\eta \cdot \frac{\partial A}{\partial s} = -\eta\dot{s}\,\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = -\eta\dot{s}$$

$$Q_\theta = \vec{F}_\eta \cdot \frac{\partial A}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = M\dot{s} - MR\dot{\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = -ks$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{3}{2}MR^2\dot{\vartheta} - MR\dot{s}\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = -MR\dot{s}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + MgR\cos\vartheta$$

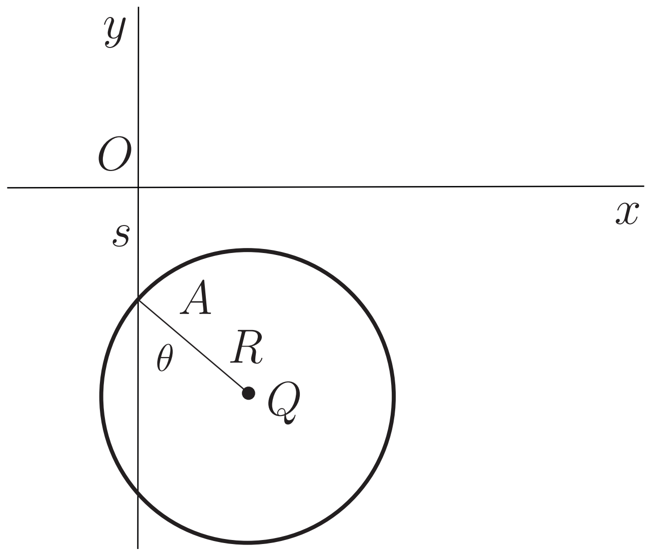
Equazioni di Lagrange

$$M\left[\ddot{s} - R\left(\ddot{\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \dot{\vartheta}^2\cos\vartheta\right)\right] + ks = -\eta\dot{s}$$

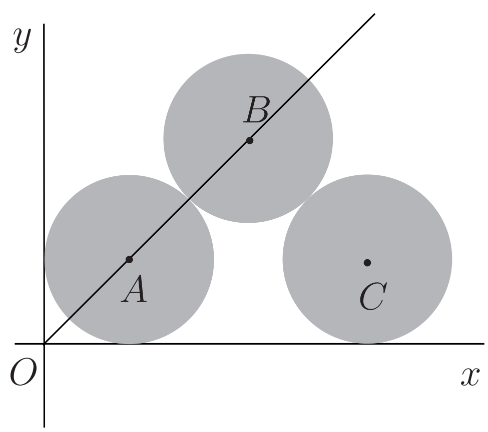
$$M\left[\frac{3}{2}R^2\ddot{\vartheta} - R\left(\ddot{s}\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \cancel{\dot{s}\dot{\vartheta}}\cos\vartheta\right) + \right.$$

$$\left. + R\cancel{\dot{s}\dot{\vartheta}}\cos\vartheta + gR\cos\vartheta\right] = 0$$

2. (10 punti) Un contorno circolare di raggio R e centro Q si muove nel piano $O(x, y)$. Il punto A del contorno scorre sull'asse y con velocit'a costante v ed il contorno ruota attorno ad A con velocità angolare $\omega = \lambda v/R$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilizzando le coordinate lagrangiane θ (angolo di AQ con l'asse y) e s (ordinata di A) come in figura si chiede di scrivere le equazioni di base e rulletta del contorno.



3. (8 punti) Nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura (con z ortogonale uscente), calcolare la matrice d'inerzia della lamina costituita dai tre cerchi uguali di centri A, B e C, raggio R e massa M mostrati in figura. Il cerchio in A è tangente all'asse x e all'asse y; il cerchio in B è tangente al cerchio in A, la retta congiungente A e B passa per l'origine e forma un angolo di $\pi/4$ con gli assi, il cerchio in C è tangente all'asse x e al cerchio in B.



Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

2) $0 = \vec{v}(C) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \times (C - A)$ (1)

Base: $\vec{v}(A) = \dot{s}\,\hat{j}$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{k}$$

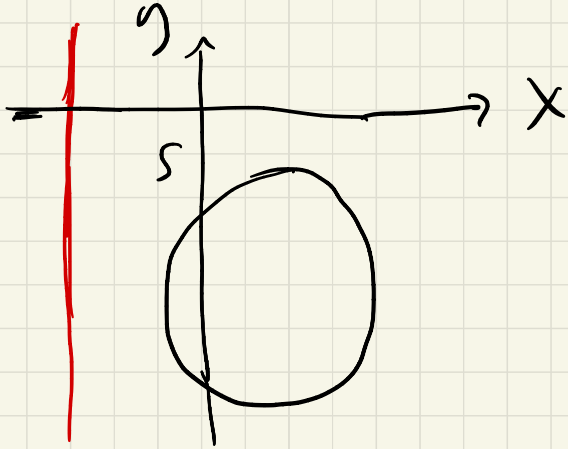
$$C - A = x_c\,\hat{\imath} + (y_c - s)\,\hat{j}$$

$$0 = \dot{s}\,\hat{j} + \dot{\theta}\,\hat{k} \times [x_c\,\hat{\imath} + (y_c - s)\,\hat{j}]$$

$$\cancel{v}\,\hat{j} + \lambda\,\frac{\cancel{v}}{R}\,[x_c\,\hat{j} + (s - y_c)\,\hat{\imath}] = 0$$

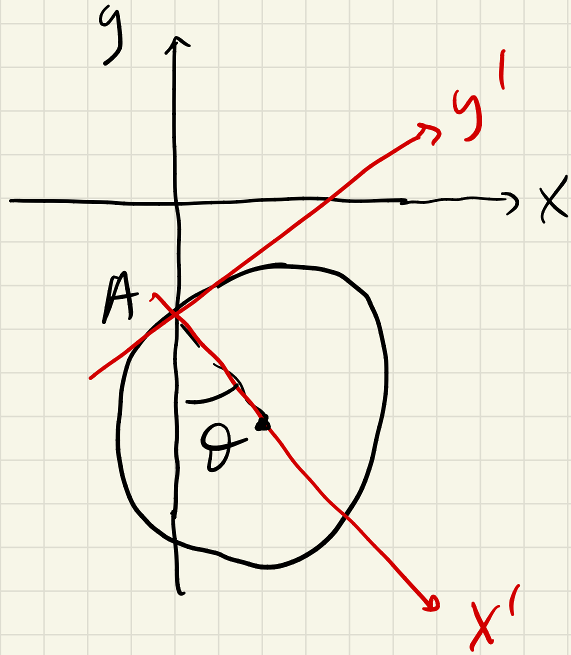
$$\begin{cases} y_c - s = 0 \\ x_c\,\dfrac{\lambda}{R} + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_c = s \\ x_c = -\dfrac{R}{\lambda} \end{cases}$$

Retta parallela all'asse y e di ascissa $-\dfrac{R}{\lambda}$



$$X = -\frac{R}{\lambda}$$

Rullette :



Sistema solidale

$O(x', y')$

$$\begin{cases} \hat{i}' = \hat{i}\,\mathrm{sen}\,\theta - \hat{j}\cos\theta \\ \hat{j}' = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \hat{i} = \hat{i}'\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{j}'\cos\theta \\ \hat{j} = -\hat{i}'\cos\theta + \hat{j}'\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\vec{v}(A) = \dot{s}\,\hat{j} = \dot{s}\left(-\hat{i}'\cos\theta + \hat{j}'\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$C - A = x'_c\,\hat{i}' + y'_c\,\hat{j}'$$

La (1) diventa

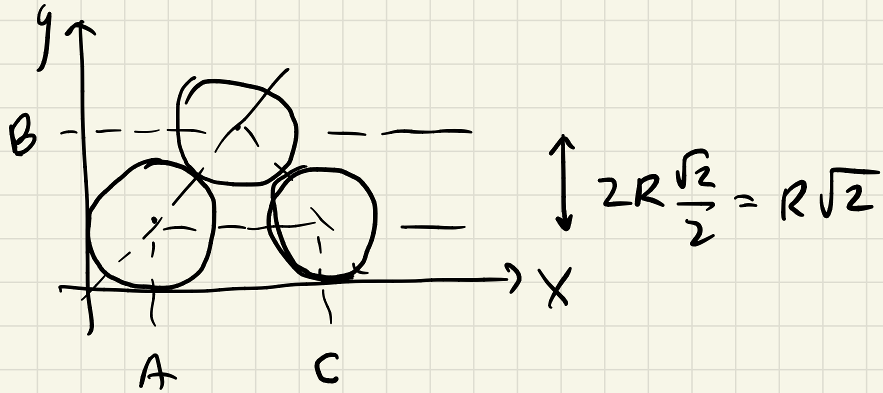
$$\cancel{v}\left(-\hat{i}'\cos\theta + \hat{j}'\operatorname{sen}\theta\right) + \lambda\frac{\cancel{v}}{R}\,\hat{k}' \times \left(x'_c\,\hat{i}' + y'_c\,\hat{j}'\right) = 0$$

$$-\hat{i}'\cos\theta + \hat{j}'\operatorname{sen}\theta + \frac{\lambda}{R}\left(x'_c\,\hat{j}' - y'_c\,\hat{i}'\right) = 0$$

$$\begin{cases} x'_c = -\dfrac{R}{\lambda}\operatorname{sen}\theta \\ y'_c = -\dfrac{R}{\lambda}\cos\theta \end{cases}$$

Circonferenza di centro A e raggio $\dfrac{R}{\lambda}$

③



$$\overline{AC} = 2R\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2 = 2R\sqrt{2}$$

$$I_{11} = 2\left\{\frac{1}{4}MR^2 + MR^2\right\} + \frac{1}{4}MR^2 + M\left(R + R\sqrt{2}\right)^2$$

$$= \frac{5}{2}MR^2 + \frac{1}{4}MR^2 + MR^2\left(3 + 2\sqrt{2}\right) =$$

$$= \left(3 + \frac{11}{4} + 2\sqrt{2}\right)MR^2 = \left(\frac{23}{4} + 2\sqrt{2}\right)MR^2$$

$$I_{22} = \frac{1}{4}MR^2 + MR^2 + \frac{1}{4}MR^2 + M\left(R + 2R\sqrt{2}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{4}MR^2 + M\left(R + R\sqrt{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{7}{4} MR^2 + MR^2 \left(9 + 3 + 6\sqrt{2}\right)$$

$$= \left(\frac{55}{4} + 6\sqrt{2}\right) MR^2$$

$$I_{33} = \left(\frac{39}{2} + 8\sqrt{2}\right) MR^2$$

$$I_{12} = -M \left\{ R^2 + R\left(R + 2R\sqrt{2}\right) + \left(R + R\sqrt{2}\right)^2 \right\} =$$

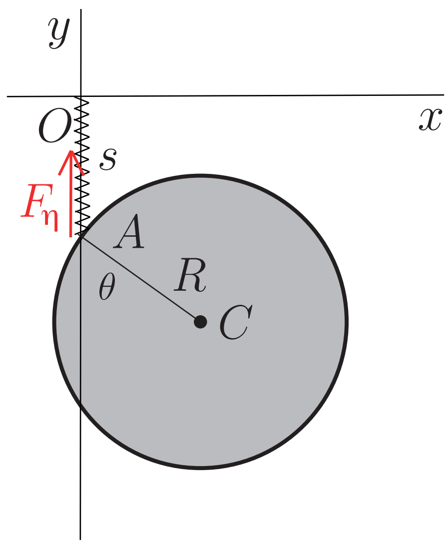
$$= -MR^2 \left(1 + 1 + 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2}\right) =$$

$$= -MR^2 \left(5 + 4\sqrt{2}\right)$$

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2022/2023
Meccanica Razionale - Appello del 8/1/2023

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 9 gennaio 2023

1. (12 punti) Un disco omogeneo di raggio R, centro C e massa M si muove nel piano verticale $O(x, y)$. Il punto A del bordo è libero di scorrere sull'asse y ed è collegato all'origine O da una molla di costante elastica $k > 0$. Il disco è libero di ruotare attorno ad A ed infine una forza viscosa di costante $\eta > 0$ agisce su A. Utilizzando le coordinate lagrangiane θ (angolo di AC con l'asse y) e s (ordinata di A) come in figura si chiede di scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema.



$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$C - O = -(s + R\cos\theta)\hat{j} + R\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\vec{v}_c = -(\dot{s} - R\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta)\hat{j} + R\hat{\imath}\,\dot{\theta}\cos\theta$$

$$v_c^2 = \dot{s}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{s}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$T = \frac{1}{2}M\left\{\dot{s}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{s}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}R^2\dot{\theta}^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}M\left\{\dot{s}^2 + \frac{3}{2}R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{s}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right\}$$

$$V = -Mg\left(s + R\cos\theta\right) + \frac{1}{2}k s^2$$

$$A - O = -s\hat{j} \qquad \vec{v}(A) = -\dot{s}\hat{j}$$

$$Q_s = \vec{F}_\eta \cdot \frac{\partial A}{\partial s} = -\eta(-\dot{s}\hat{j})\cdot(-\hat{j}) = -\eta\dot{s}$$

$$Q_\theta = \vec{F}_\eta \cdot \frac{\partial A}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = M\dot{s} - MR\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = -ks + Mg$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2}MR^2\dot{\theta} - MR\dot{s}\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -MR\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta - MgR\operatorname{sen}\theta$$

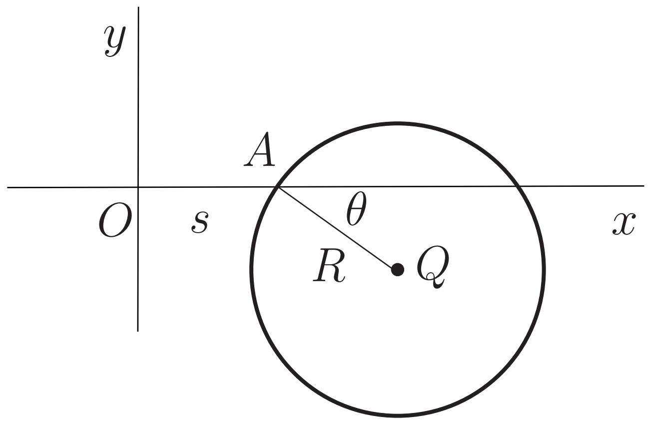
Equazioni di Lagrange

$$M\left[\ddot{s} + R\left(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\right] + ks - Mg = -\eta\dot{s}$$

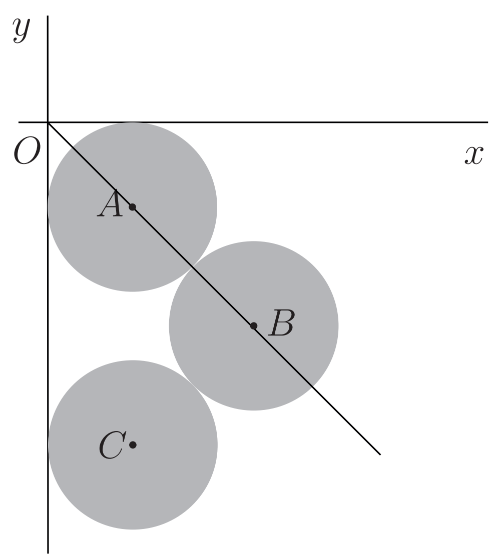
$$M\left[\frac{3}{2}R^2\ddot{\theta} - R\left(\ddot{s}\operatorname{sen}\theta + \cancel{\dot{s}\dot{\theta}}\cos\theta\right) + \right.$$

$$\left. + R\,\cancel{\dot{s}\dot{\theta}}\cos\theta + gR\operatorname{sen}\theta\right] = 0$$

2. (10 punti) Un contorno circolare di raggio R e centro Q si muove nel piano $O(x, y)$. Il punto A del contorno scorre sull'asse x con velocità costante v ed il contorno ruota attorno ad A con velocità angolare $\omega = \lambda\, v/R$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilizzando le coordinate lagrangiane θ (angolo di AQ con l'asse x) e s (ascissa di A) come in figura si chiede di scrivere le equazioni di base e rulletta del contorno.



3. (8 punti) Nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura (con z ortogonale uscente), calcolare la matrice d'inerzia della lamina costituita dai tre cerchi uguali di centri A, B e C, raggio R e massa M mostrati in figura. Il cerchio in A è tangente all'asse x e all'asse y; il cerchio in B è tangente al cerchio in A, la retta congiungente A e B passa per l'origine e forma un angolo di $-\pi/4$ con gli assi, il cerchio in C è tangente all'asse y e al cerchio in B.



Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

(2) $0 = \vec{v}(C) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \times (C - A)$ (1)

Base: $\vec{v}(A) = \dot{s}\,\hat{i}$

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\hat{k}$$

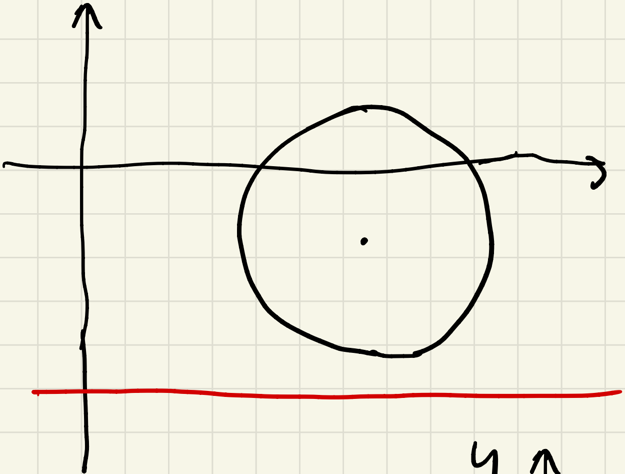
$$C - A = (x_c - s)\,\hat{i} + y_c\,\hat{j}$$

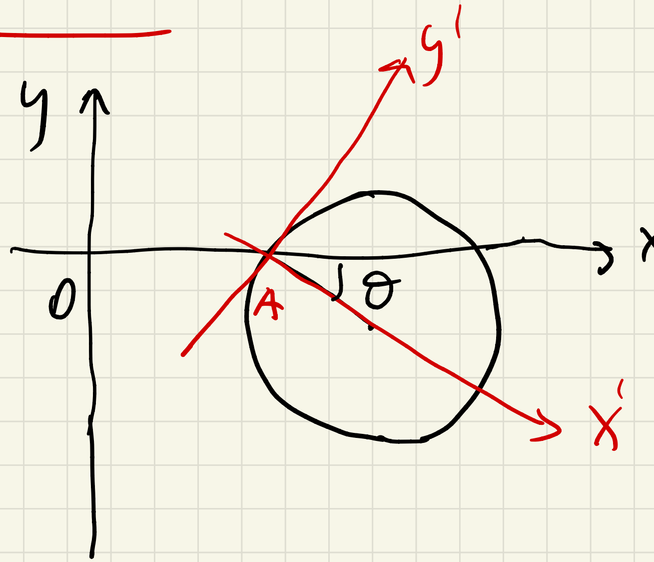
$$0 = \dot{s}\,\hat{i} - \dot{\theta}\,\hat{k} \times \left[(x_c - s)\,\hat{i} + y_c\,\hat{j}\right]$$

$$\cancel{v}\,\hat{i} - \lambda \frac{\cancel{v}}{R}\left[(x_c - s)\,\hat{j} - y_c\,\hat{i}\right] = 0$$

$$\begin{cases} x_c - s = 0 \\ y_c \dfrac{\lambda}{R} + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_c = s \\ y_c = -\dfrac{R}{\lambda} \end{cases}$$

Retta parallela all'asse x e di ordinata $-\dfrac{R}{\lambda}$





Rullette :

Sistema solidale

$O(x', y')$

$$\begin{cases} \hat{i}' = \hat{i}\cos\theta - \hat{j}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \hat{j}' = \hat{i}\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{j}\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{i} = \hat{i}'\cos\theta + \hat{j}'\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \hat{j} = -\hat{i}'\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{j}'\cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{v}(A) = \dot{s}\,\hat{i} = \dot{s}\left(\hat{i}'\cos\theta + \hat{j}'\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

$$C - A = x'_c\,\hat{i}' + y'_c\,\hat{j}'$$

La (1) diventa

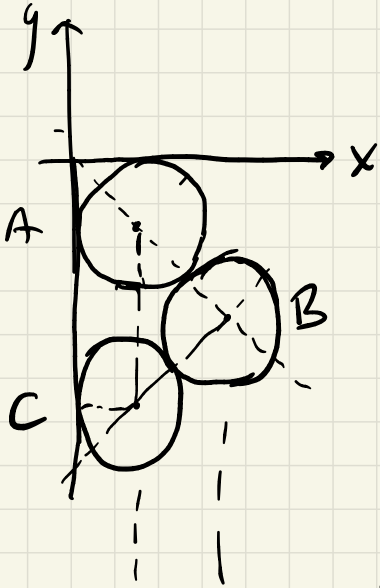
$$\cancel{v}\left(\hat{i}'\cos\theta + \hat{j}'\,\mathrm{sen}\,\theta\right) - \lambda\frac{\cancel{v}}{R}\,\hat{k}\times\left(x'_c\,\hat{i}' + y'_c\,\hat{j}'\right) = 0$$

$$\hat{i}'\cos\theta + \hat{j}'\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{\lambda}{R}\left(x'_c\,\hat{j}' - y'_c\,\hat{i}'\right) = 0$$

$$\begin{cases} x'_c = \dfrac{R}{\lambda}\,\mathrm{sen}\,\theta \\[2ex] y'_c = -\dfrac{R}{\lambda}\cos\theta \end{cases}$$

Circonferenza di centro A e raggio $\dfrac{R}{\lambda}$

(3)



$= R\sqrt{2}$

$\overline{AC} = 2R\sqrt{2}$

$\longleftrightarrow \quad 2R\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$

$I_{11} \longleftrightarrow I_{22}$ dell'altro composto

$I_{22} \longleftrightarrow I_{11}$ "

$I_{33} = I_{33}$ "

$I_{12} \longleftrightarrow -I_{12}$ "