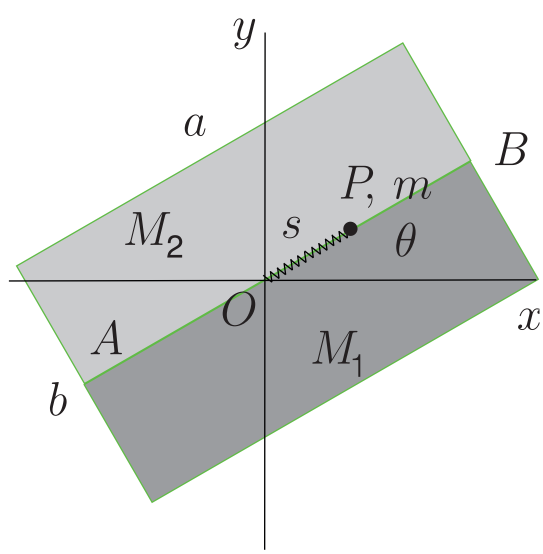
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2022/2023
Meccanica Razionale - Appello del 8/1/2023

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 9 gennaio 2023

1. Un rettangolo non omogeneo di dimensioni a e b, con $a > b$ e massa M è libero di ruotare attorno al suo centro geometrico O. Sul segmento AB, con A e B i punti medi dei lati corti, è praticata una scanalatura, all'interno della quale scorre un punto P di massa m, collegato con una molla di costante elastica $k > 0$ al punto O. Dette M_1 ed M_2 le masse delle due metà valgono le relazioni:

$$M_1 = 2\,M_2; \quad M_2 = 4\,m; \quad m\,g = 2\,k\,b.$$

Utilizzando le coordinate lagrangiane θ (angolo di AB con l'asse x) e s (ascissa di P lungo la scanalatura) come in figura si chiede di determinare le configurazioni di equilibrio e discutere la stabilità delle sole configurazioni di equilibrio in cui la molla è orizzontale.



$$V = M_2 g \frac{b}{4}\cos\vartheta - M_1 g \frac{b}{4}\cos\vartheta + \frac{1}{2} k s^2 + m g s \sin\vartheta$$

$$V_s = k s + m g \sin\vartheta$$

$$V_\vartheta = (M_1 - M_2) g \frac{b}{4}\sin\vartheta + m g s \cos\vartheta$$

Equilibrio:

$$\begin{cases} k s + m g \sin\vartheta = 0 \\ (M_1 - M_2)\cancel{g}\frac{b}{4}\sin\vartheta + m\cancel{g} s\cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = -(m g/k)\sin\vartheta \\ \left[(M_1 - M_2)(b/4) - (m^2 g/k)\cos\vartheta\right]\sin\vartheta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = -(mg/k)\sin\vartheta \\ ① \ \sin\vartheta = 0 \qquad ② \ \cos\vartheta = \dfrac{(M_1 - M_2)kb}{4m^2 g} \end{cases}$$

① $\vartheta = 0, \pi \implies s = 0$ $\qquad Q_1 \equiv (0,0)$

$Q_2 \equiv (0, \pi)$

② $\cos\vartheta = \dfrac{M_2 kb}{4m^2 g} = \dfrac{4m\, kb}{4m \cdot 2kb} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \vartheta = \dfrac{\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}$

$\vartheta = \dfrac{\pi}{3} \qquad s = -\dfrac{mg}{k}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -b\sqrt{3} \qquad Q_3 \equiv \left(-b\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\vartheta = -\dfrac{\pi}{3} \qquad s = \dfrac{mg}{k}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = b\sqrt{3} \qquad Q_4 \equiv \left(b\sqrt{3}, -\dfrac{\pi}{3}\right)$

Stabilità della soluzione 1 :

$$V_{ss} = k \qquad V_{s\theta} = mg\cos\theta = 2kb\cos\theta$$

$$V_{\theta\theta} = (M_1 - M_2)g\frac{b}{4}\cos\theta - mgs\sin\theta =$$

$$= M_2 g\frac{b}{4}\cos\theta - 2kbs\sin\theta = mgb\cos\theta - 2kbs\sin\theta =$$

$$= 2kb^2\cos\theta - 2kbs\sin\theta = 2kb(b\cos\theta - s\sin\theta)$$

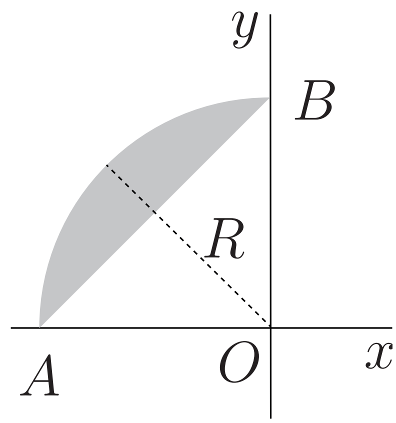
$$H(Q_1) = \begin{pmatrix} k & 2kb \\ 2kb & 2kb^2 \end{pmatrix} \qquad |H(Q_1)| = -2k^2b^2$$

NON STABILE

$$H(Q_2) = \begin{pmatrix} k & -2kb \\ -2kb & -2kb^2 \end{pmatrix} \qquad |H(Q_2)| = -6kb^2 < 0$$

NON STABILE

2. Nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura, calcolare la matrice d'inerzia della lamina forata di massa m, costituita dal quarto di cerchio di raggio R e centro O disposto nel II quadrante e privato del triangolo OAB, con A e B i vertici del quarto di cerchio sulla circonferenza.



Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

$$A_C = \frac{\pi R^2}{4} \qquad A_T = \frac{1}{2} R^2 \qquad \sigma = \frac{m}{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) R^2}$$

$$\begin{cases} m_C - m_T = m \\ \dfrac{m_T}{m_C} = \dfrac{1}{2} \dfrac{4}{\pi} = \dfrac{2}{\pi} \end{cases} \qquad \begin{aligned} & m_C - \frac{2}{\pi} m_C = m \\ & m_C \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = m \end{aligned}$$

$$m_C = \frac{\pi}{\pi - 2} m \qquad m_T = \frac{2}{\pi - 2} m$$

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}_C - \underline{\underline{I}}_T$$

Quarto di cerchio:

$$I_{11} = \frac{1}{4} m_c R^2 = I_{22} \qquad I_{33} = \frac{1}{2} m_c R^2$$

$$I_{12} = -\sigma \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^R dr\, r\, (r\cos\varphi)(r\,\mathrm{sen}\,\varphi) =$$

$$= -\sigma \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \cos\varphi \sin\varphi \, \frac{R^4}{4} = -\sigma \left[\frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{2} \right]_{\pi/2}^{\pi} \frac{R^4}{4} =$$

$$= -\sigma \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{R^4}{4} = \frac{1}{8} \sigma R^4 = \frac{1}{2\pi} m_c R^2$$

Triangolo :

$$I_{11} = \sigma \int_{-R}^{0} dx \int_{0}^{x+R} dy\, y^2 = \sigma \int_{-R}^{0} dx\, \frac{(x+R)^3}{3} = \frac{\sigma}{3} \int_{0}^{R} d\xi\, \xi^3 =$$

$$= \frac{\sigma}{3} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{3} \sigma \frac{R^2}{2} \frac{R^2}{2} = \frac{1}{6} m_T R^2 = I_{22}$$

$$I_{33} = \frac{1}{3} m_T R^2$$

$$I_{12} = -\sigma \int_{-R}^{0} dx \int_{0}^{x+R} dy\, xy = -\sigma \int_{-R}^{0} x \frac{(\overbrace{x+R}^{\xi})^2}{2} dx =$$

$$= -\frac{\sigma}{2}\int_0^R (\xi - R)\,\xi^2\, d\xi = -\frac{\sigma}{2}\left[\frac{\xi^4}{4} - R\,\frac{\xi^3}{3}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2}\,\frac{R^4}{12} =$$

$$= \frac{1}{12}\, m_T\, R^2$$

Totali:

$$I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4} m_c R^2 - \frac{1}{6} m_T R^2 = \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{6}\cdot 2\right)\frac{m}{\pi - 2} R^2 =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right)\frac{mR^2}{\pi - 2} \qquad I_{33} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)\frac{mR^2}{\pi - 2}$$

$$I_{12} = \frac{1}{2\pi} m_c R^2 - \frac{1}{12} m_T R^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \frac{m}{\pi - 2} R^2 =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{m}{\pi - 2} R^2$$

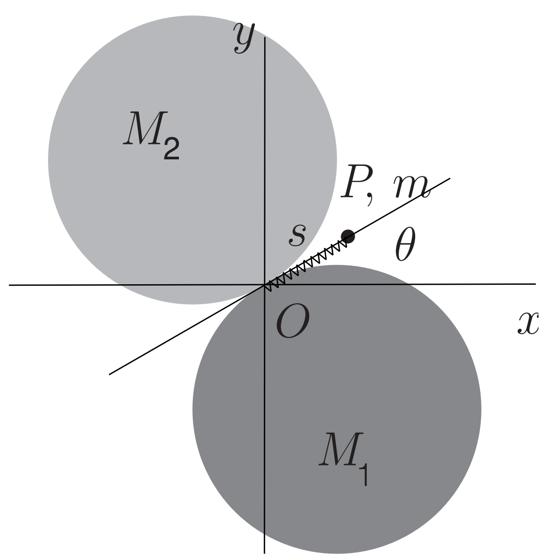
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2022/2023
Meccanica Razionale - Appello del 8/1/2023

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 9 gennaio 2023

1. Due cerchi di ugual raggio R e masse M_1 ed M_2 sono tangenti esternamente in O. Un punto P di massa m scorre senza attrito su una guida passante per O e tangente ai due cerchi. Il punto P è collegato con una molla di costante elastica $k > 0$ al punto O. Il sistema così costituito è libero di ruotare attorno ad O, che è fisso. Dette M_1 ed M_2 le masse delle due metà valgono le relazioni:

$$M_1 = 2\,M_2; \quad M_2 = 4\,m; \quad m\,g = 8\,k\,R.$$

Utilizzando le coordinate lagrangiane θ (angolo della guida con l'asse x) e s (ascissa di P lungo la guida) come in figura si chiede di determinare le configurazioni di equilibrio e discutere la stabilità delle sole configurazioni di equilibrio in cui la molla è orizzontale.



$$V = M_2 g R \cos\theta - M_1 g R \cos\theta + \frac{1}{2} k s^2 + m g s \sin\theta$$

$$V_s = ks + mg \sin\theta$$

$$V_\theta = (M_1 - M_2) g R \sin\theta + mgs \cos\theta$$

Equilibrio:

$$\begin{cases} ks + mg \sin\theta = 0 \\ (M_1 - M_2) \cancel{g} R \sin\theta + m \cancel{g} s \cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = -(mg/k) \sin\theta \\ \left[(M_1 - M_2) R - (m^2 g/k) \cos\theta\right] \sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
s = -(mg/k)\sin\theta \\
① \ \sin\theta = 0 \qquad ② \ \cos\theta = \dfrac{(M_1 - M_2)kR}{m^2 g}
\end{cases}
$$

$$① \quad \theta = 0, \pi \quad \Rightarrow \quad s = 0 \qquad Q_1 \equiv (0,0)$$

$$Q_2 \equiv (0, \pi)$$

$$② \quad \cos\theta = \frac{M_2 kR}{m^2 g} = \frac{4m\,kR}{m \cdot 8kR} = \frac{1}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \qquad s = -\frac{mg}{k}\frac{\sqrt{3}}{2} = -4R\sqrt{3} \qquad Q_3 \equiv \left(-b\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\theta = -\frac{\pi}{3} \qquad s = \frac{mg}{k}\frac{\sqrt{3}}{2} = 4R\sqrt{3} \qquad Q_4 \equiv \left(b\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$$

Stabilità della soluzione 1 :

$$V_{ss} = k \qquad V_{s\theta} = mg\cos\theta = 8kR\cos\theta$$

$$V_{\theta\theta} = (M_1 - M_2)gR\cos\theta - mgs\sin\theta =$$

$$= M_2 gR\cos\theta - 8kRs\sin\theta = 4mgR\cos\theta - 8kRs\sin\theta =$$

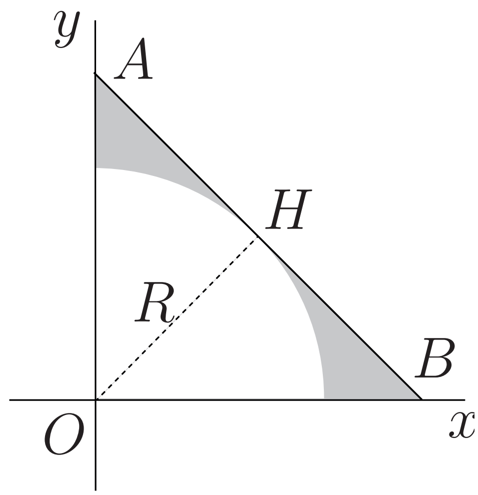
$$= 32kR^2\cos\theta - 8kRs\sin\theta = 8kR(4R\cos\theta - s\sin\theta)$$

$$H(Q_1) = \begin{pmatrix} k & 8kR \\ 8kR & 32kR^2 \end{pmatrix} \qquad |H(Q_1)| = -32kR^2 \quad \text{NON STABILE}$$

$$H(Q_2) = \begin{pmatrix} k & -8kR \\ -8kR & -32kR^2 \end{pmatrix} \qquad |H(Q_1)| = -96k^2R^2$$

NON STABILE

2. Nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura, calcolare la matrice d'inerzia della lamina forata di massa m, costituita dal triangolo rettangolo ~~equilatero~~ isoscele OAB privato del quarto di cerchio inscritto di raggio R e centro O (circonferenza e lato AB del triangolo sono tangenti in H).



Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

Lato del quadrato $\quad \overline{OB} = \overline{OA} = R\sqrt{2}$

Ipotenusa $\quad \overline{AB} = 2R$

$$A_C = \frac{\pi R^2}{4} \qquad A_T = R^2 \qquad \sigma = \frac{m}{\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) R^2}$$

$$\begin{cases} m_C - m_T = m \\ \dfrac{m_T}{m_C} = \dfrac{4}{\pi} \end{cases} \qquad m_C - \frac{4}{\pi} m_C = m$$

$$m_C \left(1 - \frac{4}{\pi}\right) = m$$

$$m_C = \frac{\pi}{\pi - 4} m \qquad m_T = \frac{4}{\pi - 2} m$$

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}_T - \underline{\underline{I}}_C$$

Esempio:

$$I_{11} = I_{22} = \sigma \int_0^{R\sqrt{2}} dx \int_0^{R\sqrt{2}-x} dy\, x^2 = \sigma \int_0^{R\sqrt{2}} dx\, x^2 \left(R\sqrt{2} - x\right) =$$

$$= \sigma \left\{ R\sqrt{2}\, \frac{2\sqrt{2}\, R^3}{3} - \frac{4R^4}{4} \right\} = \sigma \left(\frac{4}{3} - 1 \right) R^4 =$$

$$= \frac{1}{3} m_T R^2 \qquad\qquad I_{33} = \frac{2}{3} m_T R^2$$

$$I_{12} = -\sigma \int_0^{R\sqrt{2}} dx \int_0^{R\sqrt{2}-x} dy\, x y = -\sigma \int_0^{R\sqrt{2}} dx\, x\, \frac{(\overbrace{R\sqrt{2}-x}^{\xi})^2}{2} =$$

$$= -\frac{\sigma}{2}\int_0^{R\sqrt{2}} d\xi\, \xi^2 \left(R\sqrt{2} - \xi\right) = -\frac{\sigma}{2}\left(R\sqrt{2}\,\frac{2\sqrt{2}R^3}{3} - \frac{4R^4}{4}\right) =$$

$$= -\frac{\sigma}{2}\,\frac{1}{3}R^4 = -\frac{1}{6}m_T R^2$$

Cerchio :

$$I_{11} = I_{22} = \sigma \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr\, r\, r^2 \cos^2\varphi = \sigma\,\frac{\pi}{4}\,\frac{R^4}{4} = \frac{1}{4} m_c R^2$$

$$I_{12} = -\sigma \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr\, r\, r^2 \cos\varphi \sin\varphi = -\sigma \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} \frac{R^4}{4} =$$

$$= -\frac{\sigma}{2}\frac{R^4}{4} = -\frac{1}{2\pi} m_c R^2$$