**Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica**
**Anno Accademico 2021/2022**
**Meccanica Razionale - Appello del 18/11/2022**

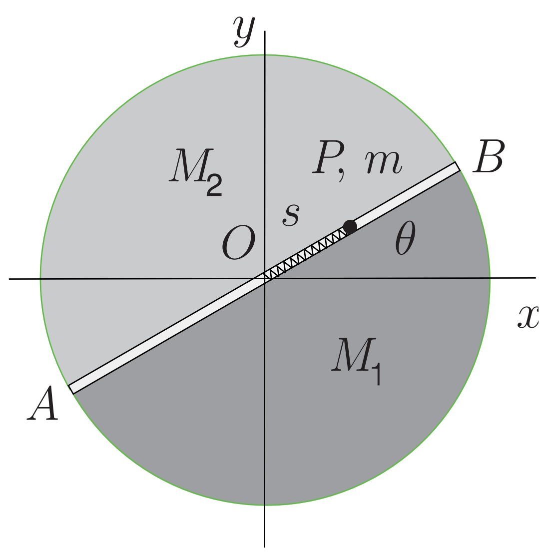
Nome ..................................................

N. Matricola .................................................. Ancona, 18 novembre 2022

1. Un cerchio non omogeneo di raggio $R$ e massa $M$ è libero di ruotare attorno al suo centro $C$. Sul diametro $AB$ è praticata una scanalatura, all'interno della quale scorre un punto $P$ di massa $m$, collegato con una molla di costante elastica $k > 0$ al punto $O$. Dette $M_1$ ed $M_2$ le masse dei due semicerchi valgono le relazioni:

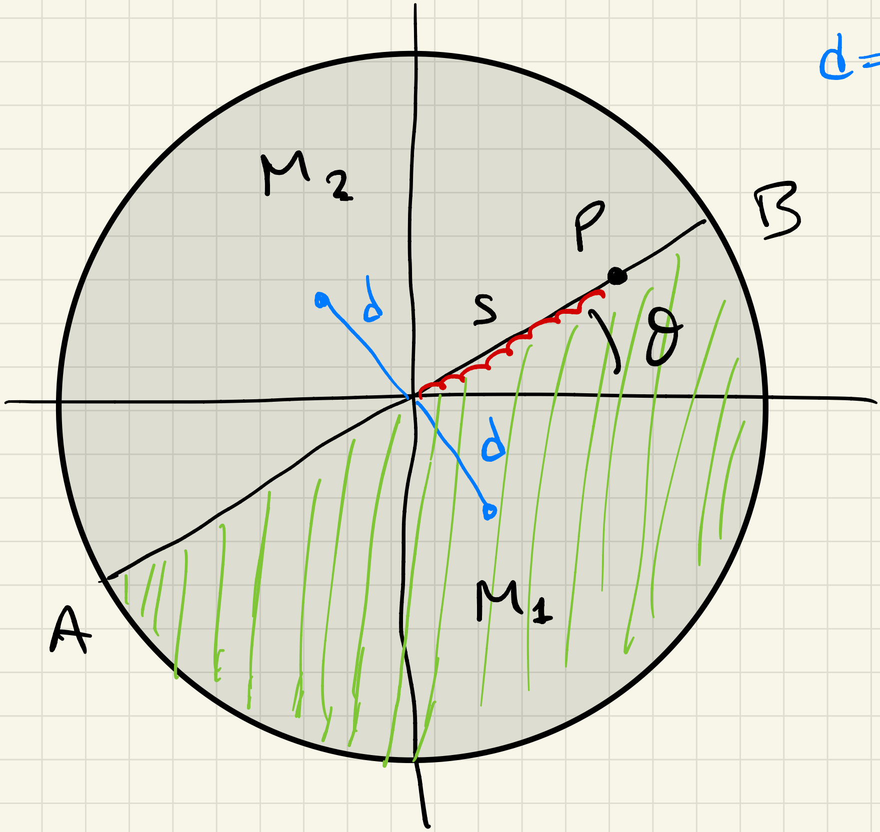
$$M_1 = 2\,M_2; \quad M_2 = 4\,m; \quad m\,g = 8\,k\,d,$$

dove $d = 4R/(3\pi)$ è la distanza del centro di massa di un semicerchio dal suo centro geometrico. Utilizzando le coordinate lagrangiane $\theta$ (angolo di $AB$ con l'asse $x$) e $s$ (ascissa di $P$ lungo la scanalatura) come in figura si chiede di determinare le configurazioni di equilibrio e discutere la stabilità delle sole configurazioni di equilibrio in cui la molla è orizzontale.




$M = M_1 + M_2 = 3M_2 = 12m$

$$d = \frac{4R}{3\pi}$$




$$V = M_1 g(-d\cos\vartheta) + M_2 g d \cos\vartheta +$$

$$+ m g s \sin\vartheta + \frac{1}{2} k s^2 =$$

$$= -M_2 g d \cos\vartheta + 8 k d s \sin\vartheta + \frac{1}{2} k s^2 =$$

$$= -4 m g d \cos\vartheta + 8 k d s \sin\vartheta + \frac{1}{2} k s^2 =$$

$$= -32\, k d^2 \cos\vartheta + 8 k d s \sin\vartheta + \frac{1}{2} k s^2$$

$$V_s = 8kd \sin\vartheta + ks \qquad (=0)$$

$$V_\vartheta = 32kd^2 \sin\vartheta + 8kds\cos\vartheta \qquad (=0)$$

$$V_s = 0 \;,\quad V_\vartheta = 0 \;:$$

$$\begin{cases} s = -8d\sin\vartheta \\ 4\cancel{d}\sin\vartheta - 8\cancel{d}\sin\vartheta\cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

$$\sin\vartheta\,(4 - 8\cos\vartheta) = 0$$

$\sin\vartheta = 0 \quad (1)$

$\cos\vartheta = \frac{1}{2} \quad (2)$

$$V_{ss} = k \qquad V_{s\vartheta} = 8kd\cos\vartheta$$

$(1)\;\; \vartheta = 0, \pi$

$(2)\;\; \vartheta = \pm \frac{\pi}{3}$

$$V_{\vartheta\vartheta} = 32kd^2\cos\vartheta - 8kds\sin\vartheta$$

$$(1)\; \sin\vartheta = 0 \;\longrightarrow\; s = 0 \qquad \vartheta = 0, \pi$$

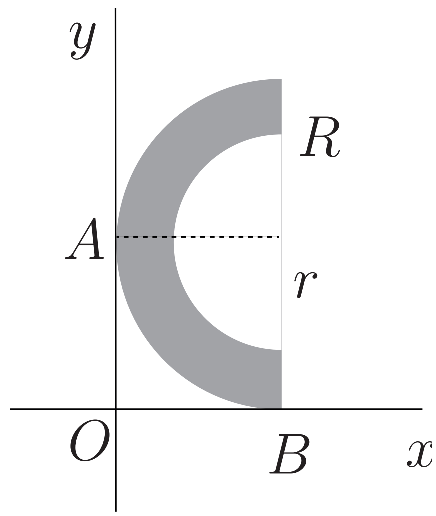
$$\vartheta = 0 : \quad H = \begin{pmatrix} k & 8kd \\ 8kd & 32kd^2 \end{pmatrix} \qquad \det = -32\,k^2 d^2 < 0$$

INSTABILE

$$\vartheta = \pi : \quad H = \begin{pmatrix} k & -8kd \\ -8kd & -32kd^2 \end{pmatrix} \qquad \det(H) = -96\,kd^2$$

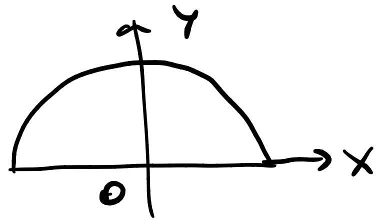
INSTABILE

2. Nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura, calcolare la matrice d'inerzia della semicorona circolare di raggi $r$ ed $R$ (con $r < R$) e massa $m$, tangente in $A$ all'asse $y$ e in $B$ all'asse $x$, disposta interamente nel I quadrante come in figura.




*Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia. Si può usare la formula $d = 4R/(3\pi)$ della distanza del centro di massa di un semicerchio dal suo centro geometrico.*

Momenti d'inerzia di un semicerchio rispetto al suo centro geometrico:

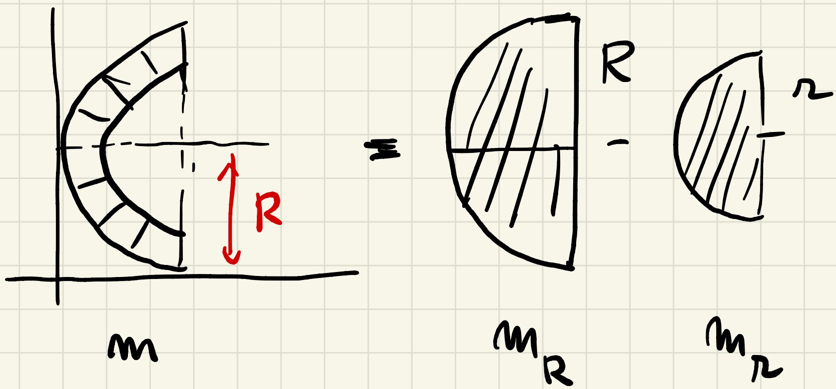



$$I_{11} = \sigma \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^R r^2 \sin^2\vartheta \, r \, dr = \sigma \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta \, d\vartheta \, \frac{R^4}{4} =$$

$$= \sigma \frac{\pi}{2} \frac{R^4}{4} = \left(\sigma \frac{\pi R^2}{2}\right) \frac{R^2}{4} = \frac{1}{4} M R^2 = I_{22}$$

$$I_{33} = \frac{1}{2} M R^2 \qquad I_{12} = 0$$

## Corona:




$$I_{11} = \frac{1}{4} m_R R^2 - \frac{1}{4} m_r r^2 + m R^2$$

$$I_{22} = \left[ \frac{1}{4} m_R R^2 - m_R \left( \frac{4R}{3\pi} \right)^2 + m_R \left( R - \frac{4R}{3\pi} \right)^2 \right] -$$

$$- \left[ \frac{1}{4} m_r R^2 - m_r \left( \frac{4r}{3\pi} \right)^2 + m_r \left( R - \frac{4r}{3\pi} \right)^2 \right]$$

E poi si sviluppano i calcoli tenendo conto delle relazioni tra

Le masse:

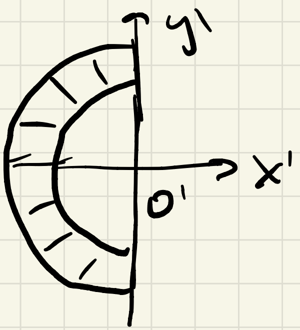
$$\begin{cases} m_R - m_r = m \\ \dfrac{m_R}{m_r} = \dfrac{R^2}{r^2} \end{cases}$$

$$m_r \left( \frac{R^2}{r^2} - 1 \right) = m$$

$$m_r = \frac{r^2}{R^2 - r^2}\, m$$

$$m_R = \frac{R^2}{R^2 - r^2}\, m$$

In alternativa, calcoliamo la matrice d'inerzia della corona rispetto al suo centro geometrico e poi spostiamo con Huygens sul centro di massa:



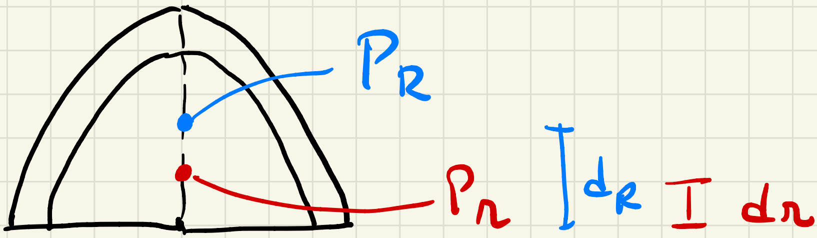

$$I_{11} = \frac{1}{4} m_R R^2 - \frac{1}{4} m_r r^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{m}{R^2 - r^2} \left( R^4 - r^4 \right) =$$

$$I_{33} = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2) \qquad = \frac{1}{4} m (R^2 + r^2) = I_{22}$$

$$I_{12} = 0$$

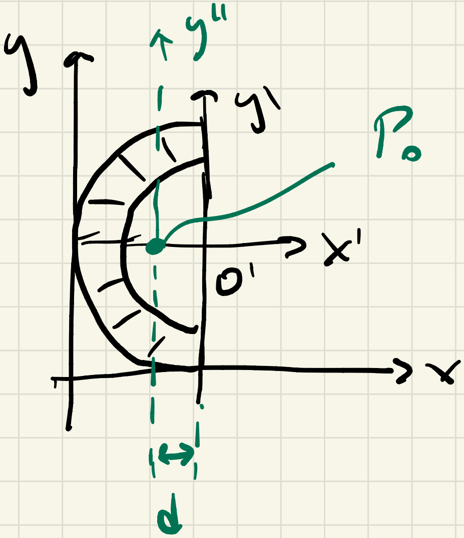
Posizione del centro di massa:




$$d = \frac{d_R m_R - d_r m_r}{m} =$$

$$= \frac{4}{3\pi} \left( R \frac{R^2}{R^2 - r^2} - r \frac{r^2}{R^2 - r^2} \right) =$$

$$= \frac{4}{3\pi} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{4}{3\pi} \frac{r^2 + Rr + R^2}{R + r}$$




Da notare che $P_0(x', y'', z'')$ è anche principale d'inerzia

$$I_{11} = \frac{1}{4} m (R^2 + r^2) + mR^2 = \frac{1}{4} m (5R^2 + r^2)$$

$$I_{22} = \frac{1}{4} m \left(R^2 + r^2\right) - m d^2 + m (R-d)^2$$

$$I_{33} = \frac{1}{4} m \left(6R^2 + 2r^2\right) - m d^2 + m (R-d)^2$$

$$I_{12} = 0 + m R (R-d)$$