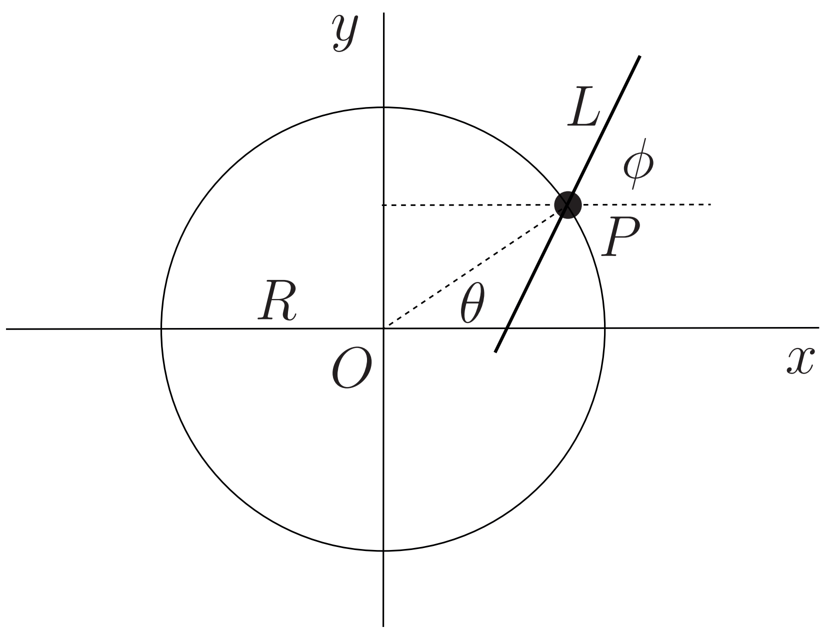
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2021/2022
Meccanica Razionale - Appello del 15/6/2022

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 15 giugno 2022

1. Un punto P di massa m scorre senza attrito sulla circonferenza di centro l'origine e raggio R nel piano verticale $O(x, y)$. Un'asta omogenea pesante di lunghezza L e massa M è libera di ruotare attorno al suo punto medio che coincide con P. Su P agisce inoltre una forza viscosa di costante $\eta > 0$. Utilizzando le coordinate lagrangiane θ (angolo di P lungo la circonferenza) e φ (angolo dell'asta con l'orizzontale) come in figura si chiede di:

   - scrivere l'energia cinetica del sistema;
   - scrivere l'energia potenziale del sistema;
   - scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema.



$$T = T_P + T_{asta}$$

$$P - O = R(\hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\,\text{sen}\,\theta)$$

$$\vec{v}(P) = R\dot{\theta}(\hat{j}\cos\theta - \hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$T_P = \frac{1}{2} m v(P)^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$

$$\vec{F}_\eta = -\eta\,\vec{v}(P) =$$

$$= -\eta R\dot{\theta}(\hat{j}\cos\theta - \hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$T_{asta} = \frac{1}{2} M v(P)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} M L^2\right)\dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M\left[R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{12} L^2 \dot{\varphi}^2\right]$$

$$T = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M\left[R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{12} L^2\dot{\varphi}^2\right]$$

$$V = mg\,y_p + Mg\,y_p =$$

$$= (m+M)\,g\,R\sin\theta$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta + MR^2\dot\theta = (m+M)R^2\dot\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -(m+M)\,g\,R\cos\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = \frac{1}{12}ML^2\dot\varphi \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

Forze generalizzate!

$$Q_\theta = \vec{F}_\eta \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} =$$

$$= -\eta \vec{v}(P) \cdot R \left(\hat{j} \cos\theta - \hat{\imath} \operatorname{sen}\theta \right) =$$

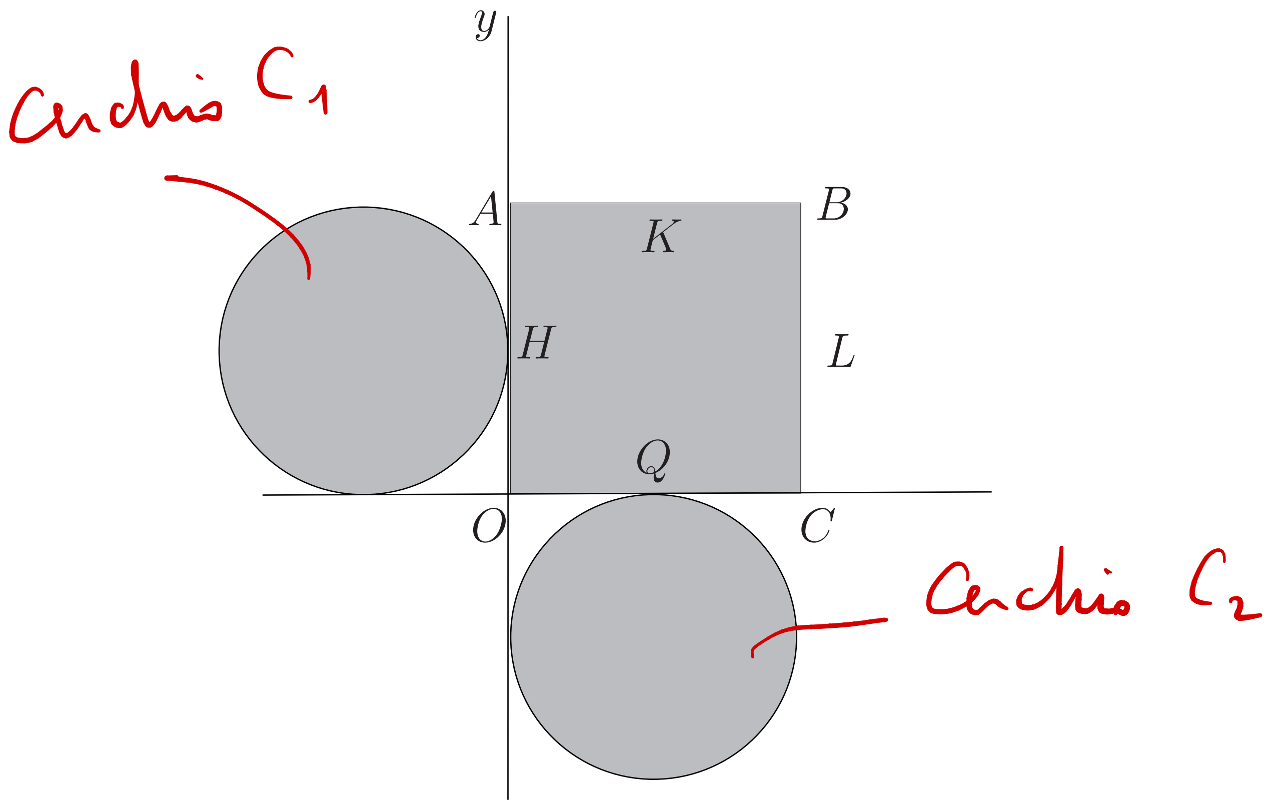
$$= -\eta R^2 \dot{\theta}$$

$$Q_\varphi = 0$$

Equazione di Lagrange:

$$\begin{cases} (m+M) R^2 \ddot{\theta} + (m+M) g R \cos\theta = -\eta R^2 \dot{\theta} \\ \frac{1}{12} M L^2 \ddot{\varphi} = 0 \qquad \varphi(t) = \frac{t^2}{2} + at + b \end{cases}$$

2. (15 punti) Nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura, con l'asse z perpendicolare al piano, calcolare la matrice d'inerzia della lamina di massa M costituita da un quadrato $OABC$ di lato L, e da due cerchi di raggio $L/2$ e tangenti esternamente ai lati OC e OA nei loro punti medi Q ed H.



Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

$$M = m_q + 2m_c$$

$$\sigma = \frac{M}{L^2 + 2\pi\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{M}{(1+\pi/2)L^2}$$

$\underline{\underline{I}}$ quadrato:

$$I_{11} = \sigma \int_0^L \int_0^L y^2 \, dx \, dy = \sigma \int_0^L dx \, \frac{L^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} m_Q L^2 = I_{22}$$

$$I_{33} = \frac{2}{3} m_Q L^2$$

$$I_{12} \text{ (con Huygens)} = 0 - \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} m_Q =$$

$$= -\frac{1}{4} m_Q L^2$$

$\underline{\underline{I}}$ cerchio C_1

$$I_{11}(P_0) = I_{22}(P_0) =$$

$$= \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin^2\varphi \, r \, dr \, d\varphi =$$

$$= \sigma \pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{4} m_c R^2 = I_{22}(P_0)$$

$$I_{33}(P_0) = \frac{1}{2} m_c R^2$$

$$I_{11}(O) = I_{11}(P_0) + m_c \left(\frac{L}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_c L^2 = I_{22}(O)$$

$$I_{33}(O) = m_c L^2$$

$$I_{12}(O) = 0 - m_c \left(\frac{L}{2}\right)\left(-\frac{L}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} m_c L^2$$

$\underline{\underline{I}}$ Cerchio C_2

I_{11}, I_{22}, I_{33} come C_1

$$I_{12} = 0 - m_c \left(-\frac{L}{2}\right)\frac{L}{2} = \frac{1}{4} m_c L^2$$

$\underline{\underline{I}}$ totale :

$$I_{11} = \frac{1}{3} m_a L^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m_c L^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} m_a + m_c \right) L^2 = I_{22}$$

$$I_{33} = 2 \left(\frac{1}{3} m_a + m_c \right) L^2$$

$$I_{12} = - \frac{1}{4} m_a L^2 + 2 \, \frac{1}{4} m_c L^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} m_c - \frac{1}{4} m_a \right) L^2$$

3. Un'asta di lunghezza L si muove nel piano $O(x, y)$ con un estremo saldato sulla circonferenza di centro l'origine e raggio R e l'altro su una retta parallela all'asse y. La circonferenza è libera di ruotare attorno al suo centro. Determinare per via geometrica il centro istantaneo di rotazione dell'asta, spiegando la ragione della propria risposta.