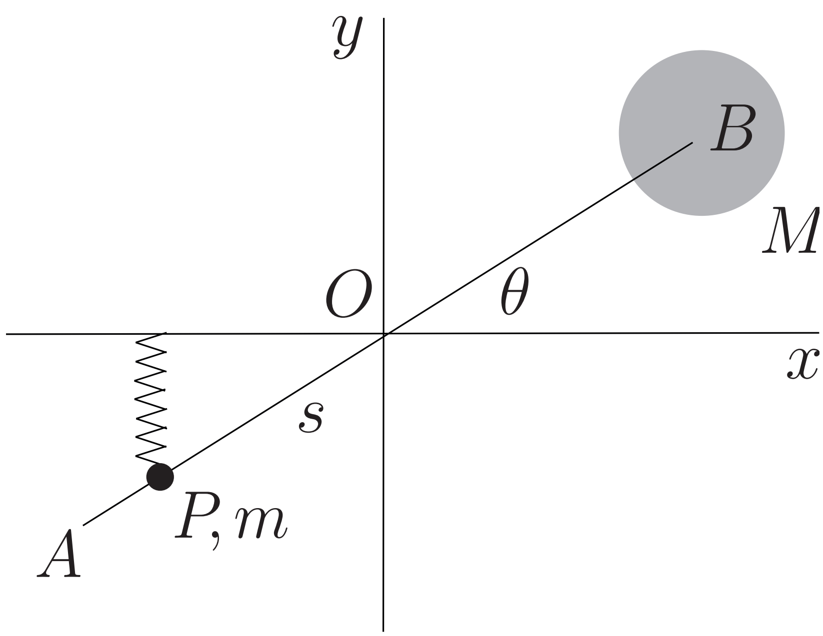
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2020/2021
Meccanica Razionale - Appello del 5/4/2022

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 5 aprile 2022

1. Un'asta AB di lunghezza L e priva di massa si muove nel piano verticale $O(x, y)$, libera di ruotare attorno al suo punto medio O che è fisso. Un punto materiale P di massa m scorre senza attrito lungo l'asta, mentre all'estremo B è saldato un disco omogeneo di massa M. Sul punto P agisce una molla di costante elastica $k > 0$ che collega P alla sua proiezione ortogonale sull'asse y. Utilizzando le coordinate lagrangiane s (ascissa di P lungo l'asta cambiata di segno, cioè $s > 0$ quando P sta a sinistra O) e θ (angolo dell'asta con l'asse x) come in figura, determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.



Energia potenziale

$$V(s,\vartheta) = Mg\, y_B + mg\, y_p + \frac{1}{2}k\,(s\sin\vartheta)^2 =$$

$$= Mg\frac{L}{2}\sin\vartheta - mg\, s\sin\vartheta + \frac{1}{2}k\, s^2\sin^2\vartheta =$$

$$= \left(\frac{ML}{2} - ms\right)g\sin\vartheta + \frac{1}{2}k\, s^2\sin^2\vartheta$$

$$V_s = -mg\sin\vartheta + ks\sin^2\vartheta$$

$$V_\vartheta = \left(\frac{ML}{2} - ms\right)g\cos\vartheta + k\, s^2\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$V_{ss} = k\sin^2\vartheta \qquad V_{s\vartheta} = -mg\cos\vartheta + 2ks\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$V_{\vartheta\vartheta} = \left(ms - \frac{ML}{2}\right)g\sin\vartheta + ks^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)$$

Configurazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} (-mg + ks\sin\vartheta)\sin\vartheta = 0 & (1) \\ \left[\left(\frac{ML}{2} - ms\right)g + ks^2\sin\vartheta\right]\cos\vartheta = 0 & (2) \end{cases}$$

Annullando uno alla volta i fattori in (1)

① $\sin\vartheta = 0 \Rightarrow \frac{ML}{2} - ms = 0 \qquad s = \frac{M}{2m}L$

$$Q_1 = \left(\frac{M}{2m}L, 0\right) \qquad Q_2 \equiv \left(\frac{M}{2m}L, \pi\right)$$

② $ks\sin\vartheta = mg$

$$\left[\left(\frac{ML}{2} - \cancel{ms}\right)g + \cancel{mgs}\right]\cos\vartheta = 0$$

$$\Rightarrow \cos\vartheta = 0 \qquad \sin\vartheta = \pm 1$$

$$Q_3 = \left(\frac{mg}{k}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad Q_4 \equiv \left(-\frac{mg}{k}, -\frac{\pi}{2}\right)$$

Stabilità :

$$H(Q_1) = \begin{pmatrix} 0 & -mg \\ -mg & k\left(\frac{M}{2m}L\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$\det(H(Q_1)) = -m^2 g^2 < 0 \qquad \text{INSTABILE}$$

$$H(Q_2) = \begin{pmatrix} 0 & mg \\ mg & k\left(\frac{M}{2m}L\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$\det(H(Q_2)) = -m^2 g^2 < 0 \qquad \text{INSTABILE}$$

Per Q_3 e Q_4:

$$V_{ss} = k \qquad V_{s\theta} = 0$$

$$V_{\theta\theta} = \left(\cancel{\pm \frac{m^2 g}{k}} - \frac{ML}{2}\right) g(\pm 1) - \cancel{k\left(\frac{mg}{k}\right)^2} =$$

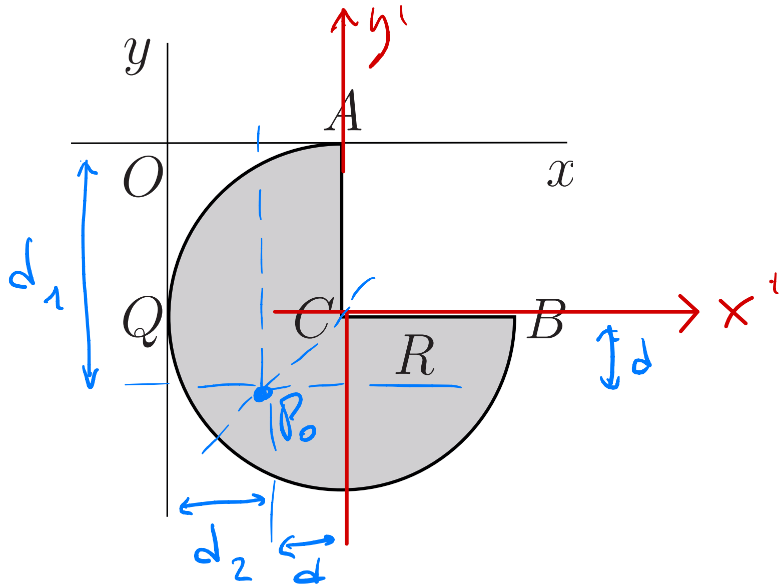
$$= \mp \frac{MLg}{2}$$

Quindi

$$H(Q_3) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -\frac{MLg}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{INSTABILE}$$

$$H(Q_4) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{MLg}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{STABILE}$$

2. È data una lamina piana di massa m costituita dal cerchio di raggio R e centro C, privato del quarto di cerchio a nord-est ACB. Calcolare la matrice d'inerzia della lamina nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura (con l'asse z uscente dal piano), con gli assi x e y tangenti alla lamina rispettivamente in A e in Q come in figura.



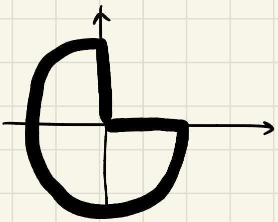
Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}_0 + M\left[R^2 \underline{\underline{1}} - \underline{R}\,\underline{R}\right]$$

$$I_{12} = I_{12}^{(0)} - M R_1 R_2$$

Calcoliamo la matrice $\underline{\underline{I}}$ nel

sistema in rosso: $C(x', y')$



$$\sigma = \frac{M}{\frac{3}{4}\pi R^2}$$

$$I'_{11} = \sigma \int_{\pi/2}^{2\pi} d\theta \int_0^R dr\, r\, (r \sin\theta)^2 =$$

$$= \sigma \int_{\pi/2}^{2\pi} d\theta\, (\sin\theta)^2 \; \frac{R^4}{4} = \sigma \, \frac{3}{4}\pi \, \frac{R^4}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} M R^2 = I'_{22}$$

$$I'_{12} = -\sigma \int_{\pi/2}^{2\pi} d\theta \int_0^R dr\, r\, r^2 \cos\theta \sin\theta =$$

$$= -\sigma \int_{\pi/2}^{2\pi} d\theta \cos\theta \sin\theta \; \frac{R^4}{4} =$$

$$= -\sigma \left. \frac{\sin^2\theta}{2} \right|_{\pi/2}^{2\pi} \frac{R^4}{4} = \sigma \frac{R^4}{8} =$$

$$= \frac{4}{3} \frac{M}{\pi} \frac{R^2}{8} = \frac{1}{6\pi} M R^2$$

Calcoliamo ora il centro di massa

nello stesso sistema:

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{M} \sigma \int_{\pi/2}^{2\pi} d\theta \int_0^R dr\, r\, r \cos\theta =$$

$$= \frac{4}{3\pi R^2} \left. \sin\theta \right|_{\pi/2}^{2\pi} \frac{R^3}{3} = -\frac{4R}{9\pi}$$

$$d = |x_0| = \frac{4R}{9\pi}$$

$$d_1 = R + d = R\left(1 + \frac{4}{9\pi}\right) = \frac{9\pi + 4}{9\pi} R$$

$$d_2 = R - d = R\left(1 - \frac{4}{9\pi}\right) = \frac{9\pi - 4}{9\pi} R$$

Ora usiamo Huygens :

$$I_{11} = I'_{11} - Md^2 + Md_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4}MR^2 + M\left(d_1^2 - d^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}MR^2 + MR^2\left(\frac{9\pi + 8}{9\pi}\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{4} + \frac{8}{9\pi}\right)MR^2$$

$$I_{22} = I'_{22} - Md^2 + Md_2^2 =$$

$$= \frac{1}{4}MR^2 + M\left(d_2^2 - d^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}MR^2 + MR^2\left(\frac{9\pi - 8}{9\pi}\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{4} - \frac{8}{9\pi}\right)MR^2$$

$$I_{12} = \underbrace{I'_{12} + M x_0 y_0}_{I_{12}(P_0)} + \underbrace{M d_1 d_2}_{-M(-d_1)d_2}$$

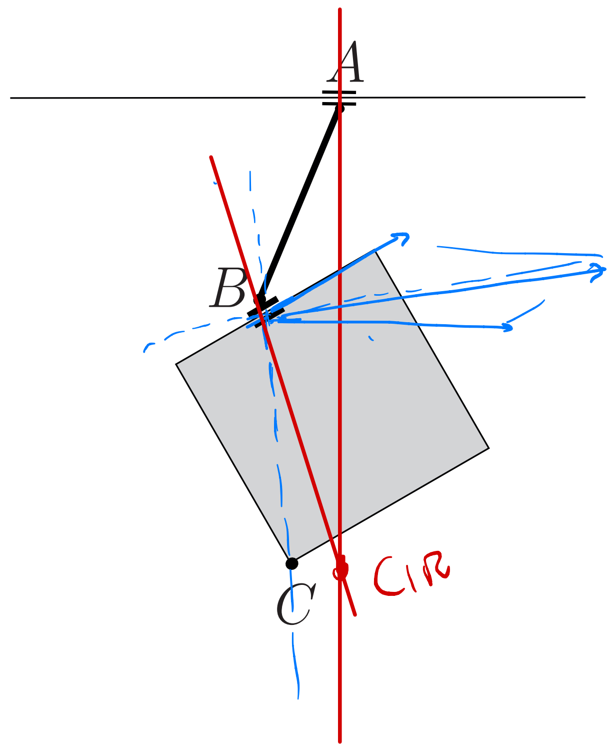
$$= \frac{1}{6\pi} MR^2 + M d^2 + M d_1 d_2 =$$

$$= \frac{1}{6\pi} MR^2 + M \left(\frac{4R}{9\pi}\right)^2 + M \frac{9\pi - 4}{9\pi} \frac{9\pi + 4}{9\pi} R^2$$

$$= \left(\frac{1}{6\pi} + \frac{\cancel{16} + 36\pi^2 - \cancel{16}}{9\pi^2}\right) MR^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{6\pi} + \frac{36}{9}\right) MR^2$$

3. Un quadrato ruota attorno al suo vertice C; un'asta AB è vincolata con l'estremo A che scorre su una guida rettilinea e l'estremo B su uno dei lati del quadrato opposti a C. Determinare per via geometrica il centro istantaneo di rotazione, spiegando la ragione della propria risposta.



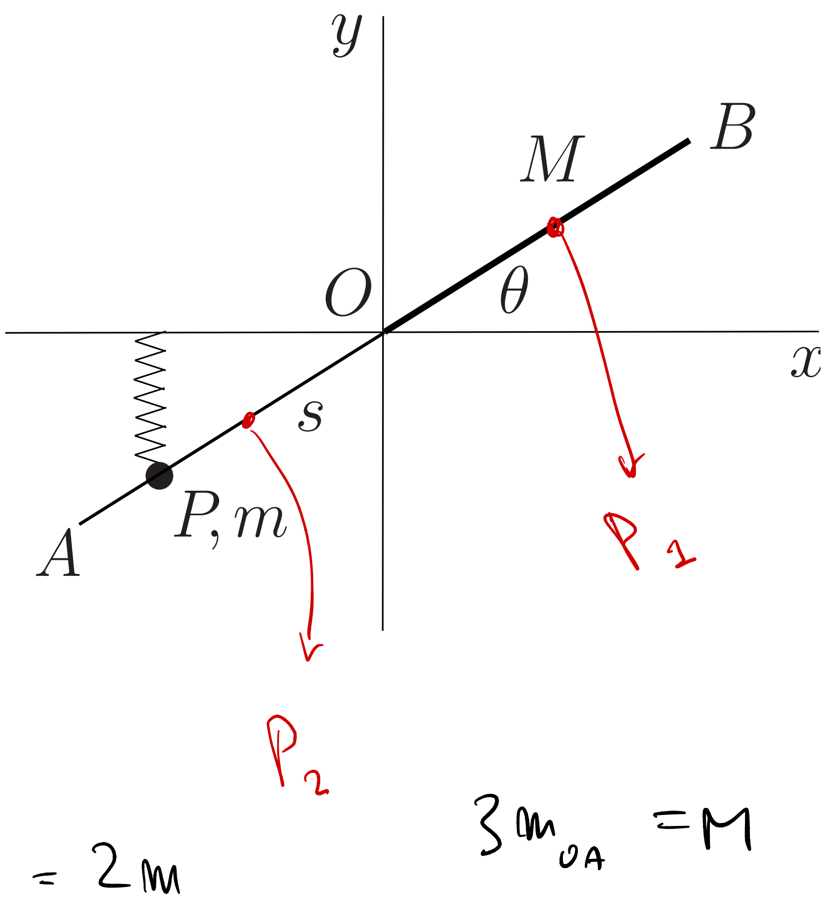
La retta rossa passante per A è la perpendicolare alla traiettoria di A. La velocità di B ha due componenti: una lungo il lato su cui scorre ed una lungo la circonferenza di centro C. Il rapporto tra le due componenti rimane indeter= minato. Operando la scelta (arbitraria) come in figura si ottiene il CIR mostrato in rosso.

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2020/2021
Meccanica Razionale - Appello del 5/4/2022

Nome ....
N. Matricola ....

Ancona, 5 aprile 2022

1. Un'asta non omogenea AB di lunghezza L e massa M si muove nel piano verticale $O(x, y)$, libera di ruotare attorno al suo punto medio O che è fisso. La massa della parte OB è doppia di quella della parte OA. Un punto materiale P di massa m scorre senza attrito lungo la metà OA dell'asta, e su di esso agisce una molla di costante elastica $k > 0$ che lo collega alla la sua proiezione ortogonale sull'asse y. Utilizzando le coordinate lagrangiane $s > 0$ (ascissa di P lungo l'asta cambiata di segno) e θ (angolo dell'asta con l'asse x) come in figura, determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.



$$\begin{cases} m_{OB} = 2m_{OA} \\ m_{OB} + m_{OA} = M \end{cases}$$

$$3m_{OA} = M$$

$$m_{OA} = \frac{M}{3} \qquad m_{OB} = \frac{2}{3}M$$

Energia potenziale

$$V(s,\theta) = \frac{2}{3}Mg\,y_1 + \frac{1}{3}Mg\,y_2 +$$

$$mg\,y_p + \frac{1}{2}k\,(s\sin\theta)^2 =$$

$$= \frac{2}{3}Mg\frac{L}{4}\sin\theta - \frac{1}{3}Mg\frac{L}{4}\sin\theta -$$

$$- mgs\sin\theta + \frac{1}{2}ks^2\sin^2\theta =$$

$$= \left(\frac{ML}{12} - ms\right)g\sin\theta + \frac{1}{2}ks^2\sin^2\theta$$

$$V_s = -mg\sin\theta + ks\sin^2\theta$$

$$V_\theta = \left(\frac{ML}{12} - ms\right)g\cos\theta + ks^2\sin\theta\cos\theta$$

$$V_{ss} = k\sin^2\theta \qquad V_{s\theta} = -mg\cos\theta + 2ks\sin\theta\cos\theta$$

$$V_{\theta\theta} = \left(ms - \frac{ML}{12}\right)g\sin\theta + ks^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

Configurazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \left(-mg + ks\sin\vartheta\right)\sin\vartheta = 0 & (1) \\ \left[\left(\frac{ML}{12} - ms\right)g + ks^2\sin\vartheta\right]\cos\vartheta = 0 & (2) \end{cases}$$

Annullando uno alla volta i fattori in (1)

① $\sin\vartheta = 0 \Rightarrow \frac{ML}{12} - ms = 0 \qquad s = \frac{M}{12m}L$

$$Q_1 = \left(\frac{M}{12m}L, 0\right) \qquad Q_2 \equiv \left(\frac{M}{12m}L, \pi\right)$$

② $ks\sin\vartheta = mg$

$$\left[\left(\frac{ML}{12} - \cancel{m}s\right)g + \cancel{m}gs\right]\cos\vartheta = 0$$

$\Rightarrow \cos\vartheta = 0 \qquad \sin\vartheta = \pm 1$

$$Q_3 = \left(\frac{mg}{k}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad Q_4 = \left(-\frac{mg}{k}, -\frac{\pi}{2}\right)$$

Stabilità :

$$H(Q_1) = \begin{pmatrix} 0 & -mg \\ -mg & k\left(\frac{M}{12m}L\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$\det\big(H(Q_1)\big) = -m^2 g^2 < 0 \qquad \text{INSTABILE}$$

$$H(Q_2) = \begin{pmatrix} 0 & mg \\ mg & k\left(\frac{M}{2m}L\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$\det\big(H(Q_2)\big) = -m^2 g^2 < 0 \qquad \text{INSTABILE}$$

Per Q_3 e Q_4:

$$V_{ss} = k \qquad V_{s\theta} = 0$$

$$V_{\theta\theta} = \left(\cancel{\mp \frac{m^2 g}{k}} - \frac{ML}{12}\right) g(\pm 1) - \cancel{k\left(\frac{mg}{k}\right)^2} =$$

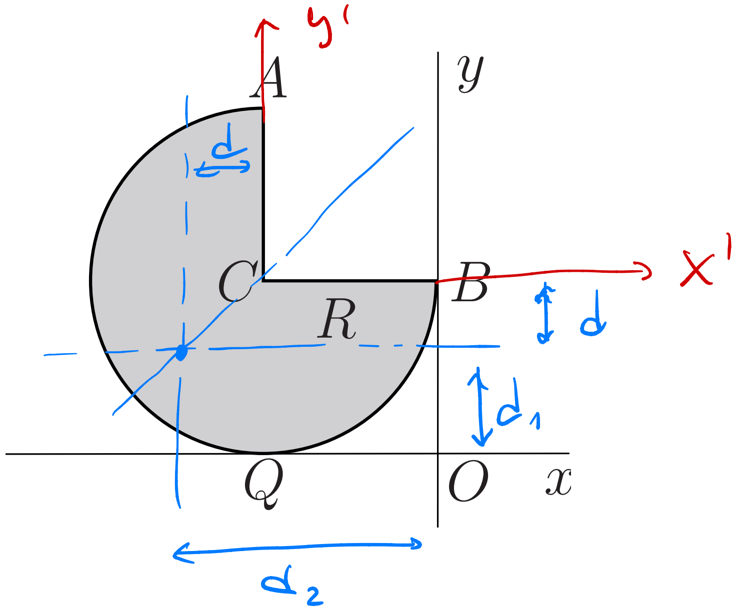
$$= \mp \frac{MLg}{12}$$

Quindi

$$H(Q_3) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -\frac{MLg}{12} \end{pmatrix} \qquad \text{INSTABILE}$$

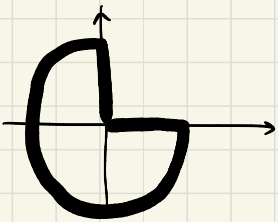
$$H(Q_4) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{MLg}{12} \end{pmatrix} \qquad \text{STABILE}$$

2. È data una lamina piana di massa m costituita dal cerchio di raggio R e centro C, privato del quarto di cerchio a nord-est ACB. Calcolare la matrice d'inerzia della lamina nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura (con l'asse z uscente dal piano), con gli assi x e y tangenti alla lamina rispettivamente in Q e in B come in figura.



Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

Calcoliamo la matrice $\underline{\underline{I}}$ nel sistema in rosso: $C(x', y')$



$$\sigma = \frac{M}{\frac{3}{4}\pi R^2}$$

$$I'_{11} = \sigma \int_{\pi/2}^{2\pi} d\vartheta \int_0^R dr\, r\, (r \sin\vartheta)^2 =$$

$$= \sigma \int_{\pi/2}^{2\pi} d\vartheta\, (\sin\vartheta)^2\, \frac{R^4}{4} = \sigma\, \frac{3}{4}\pi\, \frac{R^4}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} M R^2 = I'_{22}$$

$$I'_{12} = -\sigma \int_{\pi/2}^{2\pi} d\vartheta \int_0^R dr\, r\, r^2 \cos\vartheta \sin\vartheta =$$

$$= -\sigma \int_{\pi/2}^{2\pi} d\vartheta \cos\vartheta \sin\vartheta\, \frac{R^4}{4} =$$

$$= -\sigma \frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_{\pi/2}^{2\pi} \frac{R^4}{4} = \sigma \frac{R^4}{8} =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{M}{\pi}\frac{R^2}{8} = \frac{1}{6\pi} M R^2$$

Calcoliamo ora il centro di massa nello stesso sistema:

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{M}\sigma \int_{\pi/2}^{2\pi} d\theta \int_0^R dr\, r\, r\cos\theta =$$

$$= \frac{4}{3\pi R^2} \sin\theta\Big|_{\pi/2}^{2\pi} \frac{R^3}{3} = -\frac{4R}{9\pi}$$

$$d = |x_0| = \frac{4R}{9\pi}$$

$$d_1 = R - d = R\left(1 - \frac{4}{9\pi}\right) = \frac{9\pi - 4}{9\pi} R$$

$$d_2 = R + d = R\left(1 + \frac{4}{9\pi}\right) = \frac{9\pi + 4}{9\pi} R$$

Ora usiamo Huygens :

$$I_{11} = I'_{11} - Md^2 + Md_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4}MR^2 + M\left(d_1^2 - d^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}MR^2 + MR^2\left(\frac{9\pi - 8}{9\pi}\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{4} - \frac{8}{9\pi}\right)MR^2$$

$$I_{22} = I'_{22} - Md^2 + Md_2^2 =$$

$$= \frac{1}{4}MR^2 + M\left(d_2^2 - d^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}MR^2 + MR^2\left(\frac{9\pi + 8}{9\pi}\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{4} + \frac{8}{9\pi}\right)MR^2$$

$$I_{12} = \underbrace{I'_{12} + M x_0 y_0}_{I(P_0)} + \underbrace{M d_1 (-d_2)}_{-M(-d_2) d_1} =$$

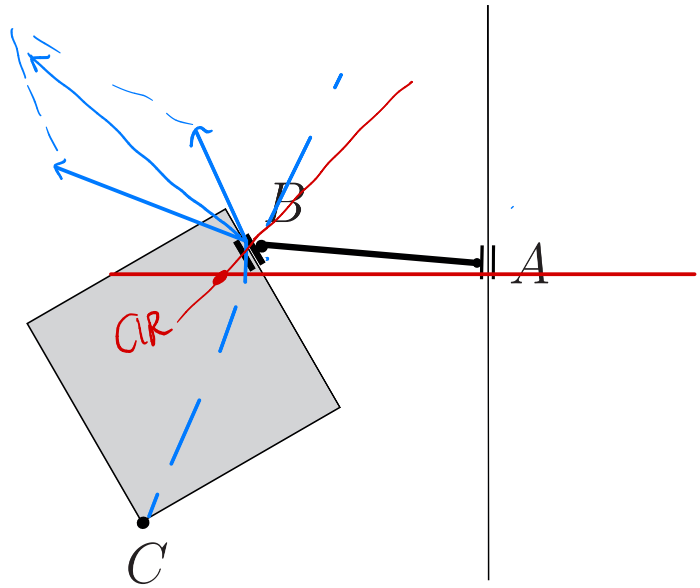
$$= \frac{1}{6\pi} MR^2 + M d^2 + M d_1 d_2 =$$

$$= \frac{1}{6\pi} MR^2 + M \left(\frac{4R}{9\pi} \right)^2 + M \frac{9\pi - 4}{9\pi} \frac{9\pi + 4}{9\pi} R^2$$

$$= \left(\frac{1}{6\pi} + \frac{\cancel{16} + 36\pi^2 - \cancel{16}}{9\pi^2} \right) MR^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{6\pi} + \frac{36}{9} \right) MR^2$$

3. Un quadrato ruota attorno al suo vertice C; un'asta AB è vincolata con l'estremo A che scorre su una guida rettilinea e l'estremo B su uno dei lati del quadrato opposti a C. Determinare per via geometrica il centro istantaneo di rotazione, spiegando la ragione della propria risposta.



La retta normale passante per A è la perpendicolare alla traiettoria di A. La velocità di B ha due componenti: una lungo il lato su cui scorre ed una lungo la circonferenza di centro C. Il rapporto tra le due componenti rimane indeterminato. Operando la scelta (arbitraria) come in figura si ottiene il CIR mostrato in rosso.