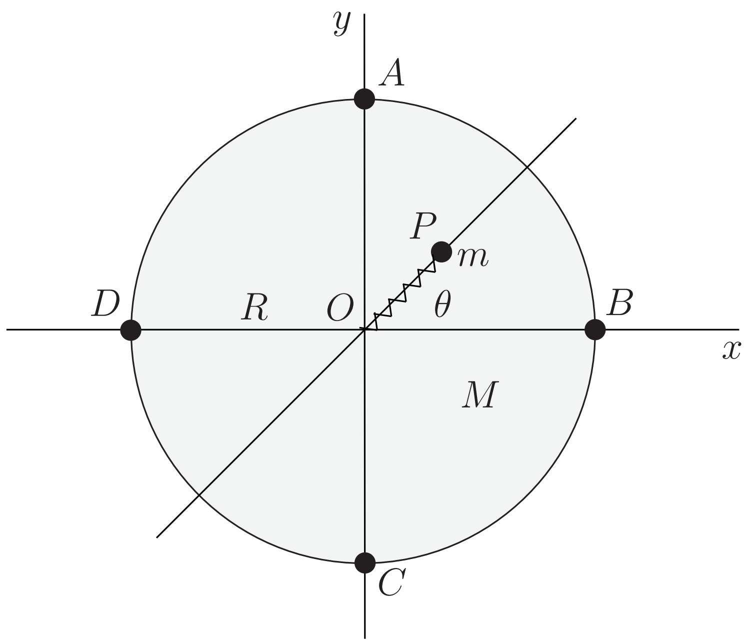
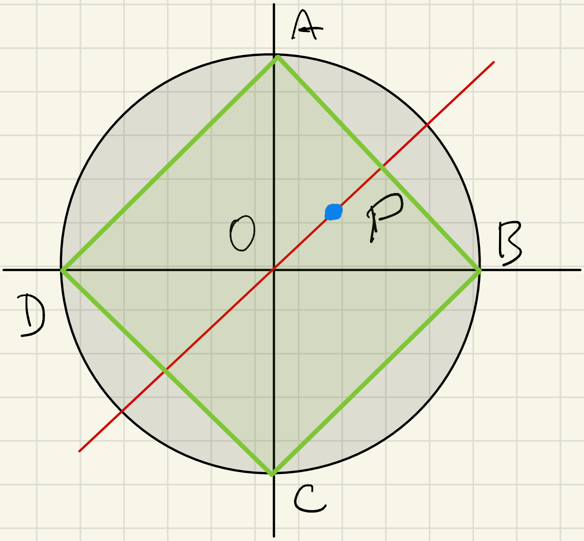
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2020/2021
Meccanica Razionale - Appello del 16/01/2021

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 16 gennaio 2021

1. Un tavolo rotondo di raggio R e massa M è appoggiato sul piano orizzontale $O(x, y)$ mediante quattro gambe prive di massa saldate nei punti cardinali A, B, C e D. Un punto P di massa m esegue un moto armonico di frequenza angolare ω su una scanalatura praticata nel tavolo con un angolo $\theta = \pi/4$ rispetto all'asse x. Supponendo che all'istante iniziale P si trovi in O con velocità v, determinare il valore minimo di v affinchè il tavolo non si ribalti.





$$P - O = \frac{v}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$P_0 = \frac{m}{M+m} \frac{v}{\omega} \sin \omega t$$

Distanza massima di P_0 dall'origine

$$d = \frac{m}{M+m} \frac{v}{\omega}$$

Il tavolo non si ribalta se P_0

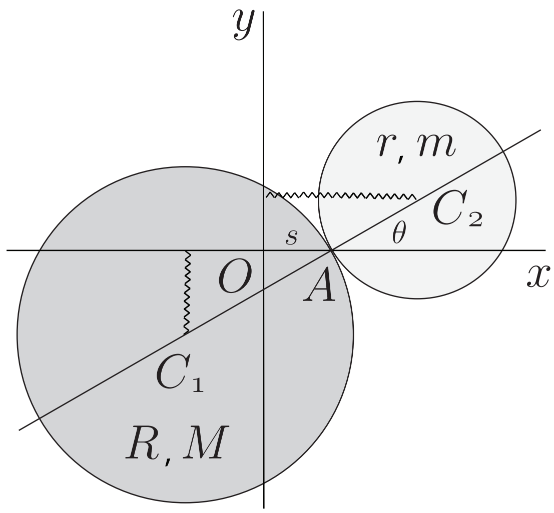
rimane all'interno del perimetro

di appoggio, che è il quadrato verde.

$$\Rightarrow \frac{m}{M+m} \frac{v}{\omega} < R \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ovvero $$\boxed{v < \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{M}{m}\right)\omega R}$$

2. Un corpo rigido è costituito da due cerchi di centri C_1 e C_2, raggi R e r e masse M e m saldati e tangenti esternamente nel punto A, che è libero di scorrere sull'asse x del piano verticale $O(x, y)$. Due molle di costanti $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$ collegano i centri C_1 e C_2 con le loro proiezioni rispettivamente sull'asse x e sull'asse y.



Utilizzando le coordinate lagrangiane s (ascissa di A) e θ (angolo della retta passante per i centri con l'asse x) indicate in figura, determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

$$V = V_{g,1} + V_{g,2} + V_{k_1} + V_{k_2}$$

$$V_{g,1} = Mg\,y(C_1) = -MgR\,\text{sen}\,\theta$$

$$V_{g,2} = mg\,y(C_2) = mgR\,\text{sen}\,\theta$$

$$V_{k_1} = \frac{1}{2}k_1\left(R\,\text{sen}\,\theta\right)^2 = \frac{1}{2}k_1R^2\sin^2\theta$$

$$V_{k_2} = \frac{1}{2}k_2\left(s + R\cos\theta\right)^2$$

$$V = g(mR - MR)\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}\Big\{k_1R^2\,\text{sen}^2\theta +$$
$$+ k_2\left(s + R\cos\theta\right)^2\Big\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = k_2 (s + R\cos\theta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = g(mr - MR)\cos\theta + k_1 R^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta +$$
$$+ k_2 (s + R\cos\theta)(-R \operatorname{sen}\theta)$$

Equilibri :

$$\begin{cases} \boxed{s + R\cos\theta = 0} \\ \{ g(mr - MR) + k_1 R^2 \operatorname{sen}\theta \}\cos\theta - \\ \quad - k_2 R \cancel{(s + R\cos\theta)} = 0 \end{cases}$$

$$s + R\cos\theta = 0$$

$$\{ g(mr - MR) + k_1 R^2 \operatorname{sen}\theta \}\cos\theta = 0$$

(1) $\cos\vartheta = 0 \qquad \vartheta = \pm \dfrac{\pi}{2}$

$$s = -R\cos\vartheta = 0$$

(2) $\operatorname{sen}\vartheta = -\dfrac{g(mr - MR)}{k_1 R^2}$

$\pi - \vartheta_0$

ϑ_0

$$s = -R(\pm)\sqrt{1 - \frac{g^2(mr - MR)^2}{k_1 R^2}}$$

Se $M = 2m, \quad R = 2r, \quad k_1 r = 10\, mg$

$$\operatorname{sen}\vartheta = \frac{3mgr}{k_1 R^2} = \frac{3mgr}{4k_1 r^2} = \frac{3}{4}\,\frac{1}{10} = \frac{3}{40}$$

$$V_{ss} = k_1 \qquad V_{s\vartheta} = -kR\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

$$V_{\vartheta\vartheta} = g(MR - mr)\,\mathrm{sen}\,\vartheta + k_1R^2(\cos^2\vartheta - \mathrm{sen}^2\vartheta)$$

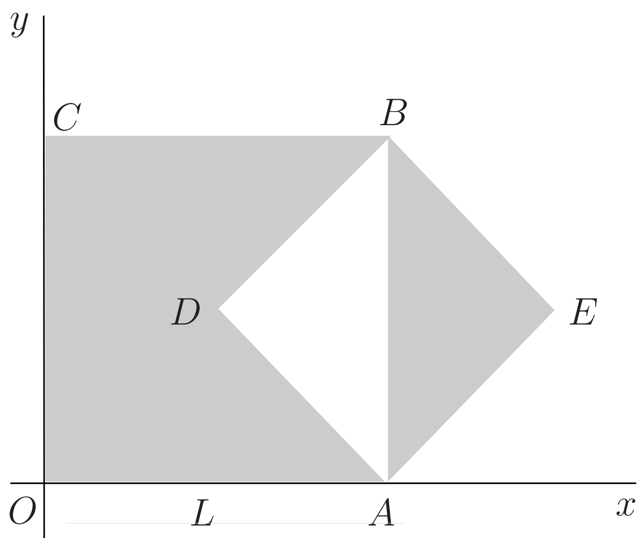
$$- k_2\, sR\cos\vartheta - k_2R^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)$$

$$\longrightarrow 5mrg\,\mathrm{sen}\,\vartheta + (2r)(10mg)(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)$$

$$- k_2\left[2s\cos\vartheta + 4r(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\right]r$$

$$k_2 r = mg$$

3. Nel sistema di riferimento $O(x, y)$ indicato in figura, calcolare la matrice d'inerzia del corpo rigido di massa M, costituito dal quadrato $OABC$ di lato L, privato del triangolo ABD, con D centro del quadrato, e con l'aggiunta del triangolo ABE, dove E è il simmetrico di D rispetto al lato AB (è come se il pezzo corrispondente al triangolo ABD fosse stato ripiegato in fuori).

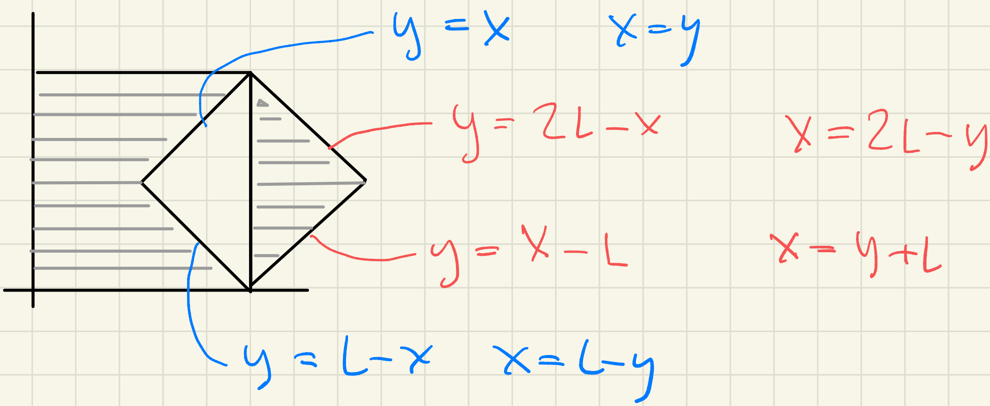


Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

Il momento d'inerzia I_{11} non risente della rispezzatura; quindi

$$I_{11} = \sigma \int_0^L dx \int_0^L dy\, y^2 = \sigma \cdot L \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} M L^2$$

Per I_{22} e I_{12} integriamo direttamente.
Si devono ottenere le equazioni delle rette DB, DA, EB, EA:



$$I_{22} = 2\sigma \int_0^{L/2} dy \int_0^{L-y} dx\, x^2 + 2\sigma \int_0^{L/2} dy \int_L^{y+L} dx\, x^2 =$$

$$= 2\sigma \left\{ \int_0^{L/2} dy\, \frac{(L-y)^3}{3} + \int_0^{L/2} dy\, \frac{(y+L)^3 - L^3}{3} \right\} =$$

$$= \frac{2\sigma}{3} \left\{ \int_{L/2}^{L} y^3\, dy + \int_L^{\frac{3}{2}L} y^3\, dy - \frac{L^4}{2} \right\} =$$

$$= \frac{2\sigma}{3} \left\{ \frac{L^4 - L^4/16}{4} + \frac{(81/16)L^4 - L^4}{4} - \frac{L^4}{2} \right\} =$$

$$= \frac{2\sigma}{3} \left\{ \frac{15}{64} + \frac{65}{64} - \frac{1}{2} \right\} L^4 =$$

$$= \frac{2}{3}\sigma \, \frac{80 - 32}{64} L^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{48}{64} \sigma L^4 = \frac{1}{2} M L^2$$

$$I_{12} = -\sigma \int_0^{L/2} dy \int_0^{L-y} dx\, xy - \sigma \int_{L/2}^{L} dy \int_0^{y} dx\, xy -$$

$$-\sigma \int_0^{L/2} dy \int_L^{y+L} dx\, xy - \sigma \int_{L/2}^{L} dy \int_0^{2L-y} dx\, xy =$$

$$= -\sigma \int_0^{L/2} dy\, y \frac{(L-y)^2}{2} - \sigma \int_{L/2}^{L} dy\, y \frac{y^2}{2} -$$

$$-\sigma \int_0^{L/2} dy\, y \frac{(y+L)^2 - L^2}{2} - \sigma \int_{L/2}^{L} dy\, y \frac{(2L-y)^2}{2} =$$

$$= -\sigma \int_{L/2}^{L} dy\, (L-y) \frac{y^3}{2} - \sigma \frac{L^4 - (L/2)^4}{8} -$$

$$-\sigma \int_0^{L/2} dy\, y \frac{(y+2L)y}{2} - \sigma \int_L^{3L/2} dy\, (2L-y) \frac{y^3}{2} =$$

etc.