Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2020/2021
Meccanica Razionale - Appello del 16/01/2021

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 16 gennaio 2021

1. (Vettori e teoria del momenti) Calcolare l'invariante scalare del sistema di vettori applicati $\{(A, \mathbf{u}_i)\}$, $i = 1, 2, 3$, con $A = (1, 1, 1)$ e

$$\mathbf{u}_1 = \alpha\,\widehat{\mathbf{i}} \qquad \mathbf{u}_2 = \beta\,\widehat{\mathbf{j}} \qquad \mathbf{u}_3 = \gamma\,\widehat{\mathbf{k}}$$

$$\mathcal{J} = \vec{M}(O) \cdot \vec{R}$$

$$\vec{R} = \alpha \hat{i} + \beta \hat{j} + \gamma \hat{k}$$

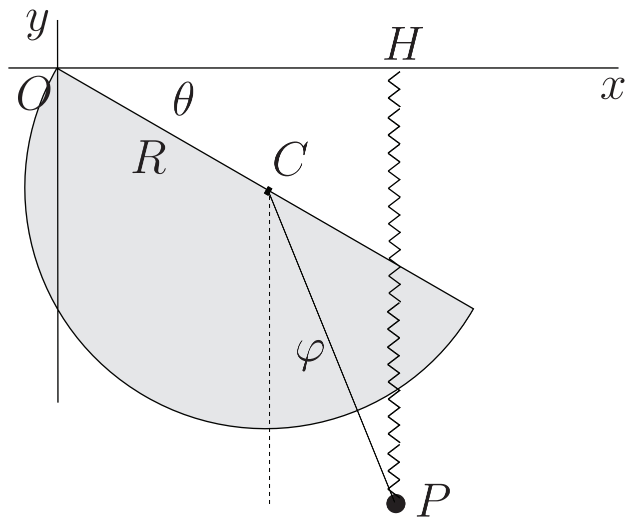
$$\vec{M}(O) = (A-O) \times \vec{u}_1 + (A-O) \times \vec{u}_2 +$$

$$+ (A-O) \times \vec{u}_3 =$$

$$= (A-O) \times (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (A-O) \times \vec{R}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{J} = \vec{M}(O) \cdot \vec{R} = 0$$

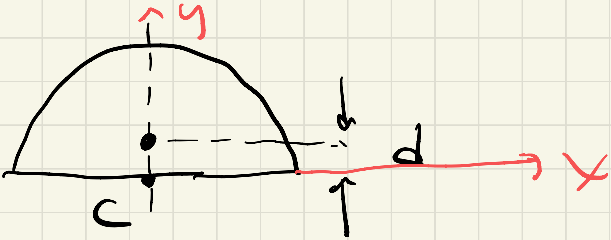
2. (Lagrange) Un semicerchio di raggio R, massa M, centro C e diametro AB si muove nel piano verticale $O(x, y)$ con l'estremo diametrale A fisso nell'origine, $A \equiv O$ e libero di ruotare attorno ad O. Un pendolo matematico di massa m e lunghezza l si muove nello stesso piano verticale $O(x, y)$, sospeso nel centro del semicerchio C. Infine, una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto P con la sua proiezione ortogonale H sull'asse x.



Utilizzando le coordinate lagrangiane θ e φ indicate in figura, scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema.

Indichiamo con P_0 il centro di massa del semicerchio e sia

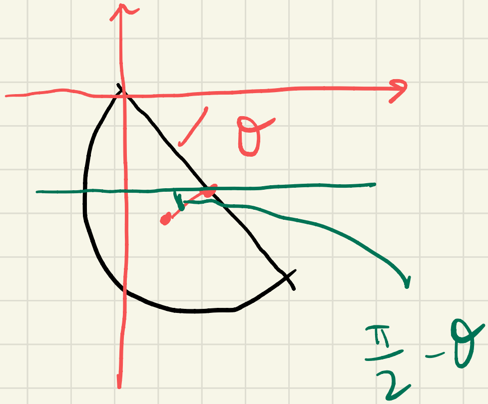
$$d = |P_0 - C|$$



$$d = \frac{1}{M}\iint \sigma y \, dx\, dy = \frac{\sigma}{M}\int_0^R \int_0^\pi r \sin\vartheta \, r \, dr \, d\vartheta =$$

$$= \frac{\sigma}{M}\left[-\cos\vartheta\right]_0^\pi \frac{R^3}{3} = \frac{\sigma}{M} 2 \frac{R^3}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1}{\pi R^2/2} R^3 = \frac{4R}{3\pi}$$



$$P_0 - C = d\left(-\hat{\imath}\,\operatorname{sen}\theta - \hat{\jmath}\cos\theta\right)$$

$$P_0 - O = P_0 - C + C - O =$$

$$= d\left(-\hat{\imath}\,\operatorname{sen}\theta - \hat{\jmath}\cos\theta\right) +$$

$$+ R\left(\hat{\imath}\cos\theta - \hat{\jmath}\,\operatorname{sen}\theta\right)$$

L'energia cinetica del semidisco è

$$T_M = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \underline{\underline{I}}(O) \cdot \vec{\omega} =$$

$$= \frac{1}{2}(-\dot{\vartheta}\hat{n}) \cdot \underline{\underline{I}}(O) \cdot (-\dot{\vartheta}\hat{n}) =$$

$$= \frac{1}{2} I_{33}(O)\,\dot{\vartheta}^2$$

$$I_{33}(O) = I_{33}(C) - Md^2 + M(d^2+R^2) =$$

$$= I_{33}(C) + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 =$$

$$= \frac{3}{2}MR^2$$

$$T_M = \frac{3}{4}MR^2$$

Energia potenziale del semidisco:

$$V_M = Mg\,y_0 = -Mg\,(d\cos\theta + R\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Per il punto P:

$$P-O = P-C+C-O =$$

$$= \ell\,(\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\varphi - \hat{\jmath}\cos\varphi) + R(\hat{\imath}\cos\theta - \hat{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$\vec{v}_P = \ell\dot{\varphi}(\hat{\imath}\cos\varphi + \hat{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\varphi) - R\dot{\theta}(\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{\jmath}\cos\theta)$$

$$T_P = \frac{1}{2} m v_P^2 = \frac{1}{2} m \Big\{ \ell^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 +$$

$$+ 2\,\ell R\dot{\theta}\dot{\varphi}(-\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta)\Big\}$$

$$V_P = mg\,y_P = mg\,(-\ell\cos\varphi - R\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Per la molla:

$$V_m = \frac{1}{2} k \overline{HP}^2 = \frac{1}{2} k (l \cos\varphi + R \operatorname{sen}\vartheta)^2$$

Complessivamente:

$$T = \frac{3}{4} M R^2 \dot\vartheta^2 + \frac{1}{2} m \{ l^2 \dot\varphi^2 + R^2 \dot\vartheta^2 -$$

$$- 2 l R \dot\vartheta \dot\varphi \cos(\varphi - \vartheta) \}$$

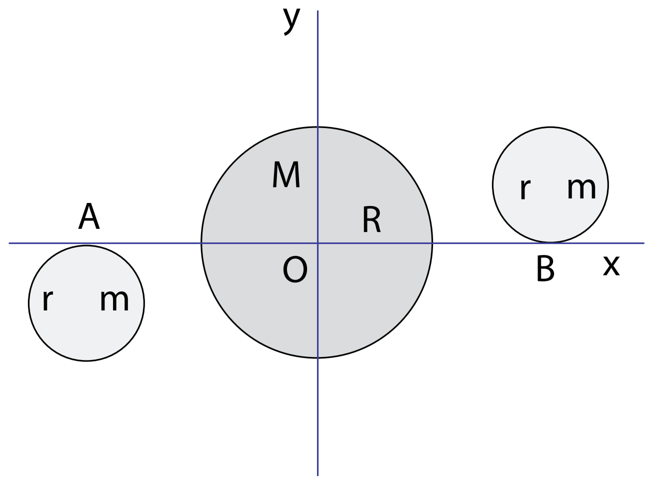
$$V = -Mg(d \cos\vartheta + R \operatorname{sen}\vartheta) - mg(l \cos\varphi + R \operatorname{sen}\vartheta)$$

$$+ \frac{1}{2} k (l \cos\varphi + R \operatorname{sen}\vartheta)^2$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

etc.

3. (Matrice d'inerzia) Nel sistema di riferimento $O(x, y)$ indicato in figura, calcolare la matrice d'inerzia del corpo rigido costituito dal cerchio di centro l'origine, massa M e raggio R, e dai due cerchi di ugual massa m e ugual raggio r, tangenti all'asse x nei punti A e B, a distanza $2R$ dall'origine, e disposti su semipiani opposti come in figura.



Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

Cerchio grande:

$$I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4} M R^2 \qquad I_{33} = \frac{1}{2} M R^2$$

Cerchi piccoli (ciascuno)

$$I_{11} = \frac{1}{4} m r^2 + m r^2 = \frac{5}{4} m r^2$$

$$I_{22} = \frac{1}{4} m r^2 + m (2R)^2 = m\left(\frac{1}{4} r^2 + 4 R^2\right)$$

$$I_{33} = \frac{3}{2} m r^2 + 4 m R^2$$

$$I_{12} = m r (2R) = \boxed{-2mrR}$$

Totali: $I_{11} = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{5}{2} m r^2$

$$I_{22} = \frac{1}{4} M R^2 + m\left(\frac{1}{2} r^2 + 8 R^2\right)$$

$$I_{12} = \boxed{-4mrR}$$