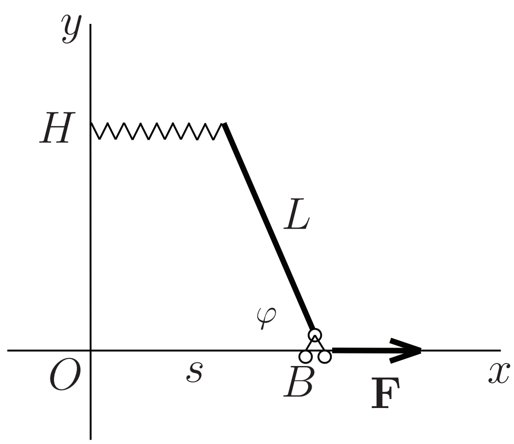
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2019/2020
Meccanica Razionale - Appello del 10/06/2020
Appello svolto in modalità a distanza

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 10 giugno 2020

1. Un'asta di lunghezza L e massa m si muove nel piano verticale $O(x, y)$, libera di ruotare attorno all'estremo B che scorre senza attrito sull'asse x. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega l'estremo A con la sua proiezione H sull'asse y ed una forza costante $\mathbf{F} = F\,\widehat{\mathbf{i}}$, con $F > 0$ agisce sul punto B. Usando le coordinate lagrangiane s e φ indicate in figura, si chiede di:



   (a) scrivere l'energia cinetica dell'asta;
   (b) scrivere l'energia potenziale dell'asta;
   (c) determinare le configurazioni di equilibrio dell'asta usando le equazioni cardinali della statica.

Svolgimento. Calcoliamo preliminarmente le coordinate e velocità del centro di massa:

$$
\begin{aligned}
&P_0 - O = \left(s - \frac{L}{2}\cos\varphi\right)\widehat{\mathbf{i}} + \frac{L}{2}\sin\varphi\,\widehat{\mathbf{j}} \\
&\mathbf{v}_0 = \left(\dot{s} + \frac{L}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\widehat{\mathbf{i}} + \frac{L}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\,\widehat{\mathbf{j}} \\
&v_0^2 = \dot{s}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2 + L\,\dot{s}\,\dot{\varphi}\sin\varphi
\end{aligned}
$$

(a) Per scrivere l'energia cinetica dell'asta usiamo il teorema di König:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m\,v_0^2 + \frac{1}{2}I_z(P_0)\,\omega^2 = \frac{1}{2}m\left\{\dot{s}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2 + L\,\dot{s}\,\dot{\varphi}\sin\varphi\right\} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m\,L^2\right)\dot{\varphi}^2 = \\
&= \frac{1}{2}m\left\{\dot{s}^2 + \frac{L^2}{3}\dot{\varphi}^2 + L\,\dot{s}\,\dot{\varphi}\sin\varphi\right\}
\end{aligned}
$$

(b) L'energia potenziale è la somma di tre contributi, dovuti alla forza peso, alla molla ed alla forza costante $\mathbf{F}$ (una forza costante è conservativa):

$$
\begin{aligned}
V &= m\,g\,y_0 + \frac{1}{2}k\,(s - L\cos\varphi)^2 - F\,x_B = \\
&= \frac{m\,g\,L}{2}\sin\varphi + \frac{1}{2}k\,(s - L\cos\varphi)^2 - F\,s
\end{aligned}
$$

(c) Le forze che agiscono sul sistema sono: la forza peso applicata al centro di massa; la forza elastica applicata nel punto A; la forza costante $\mathbf{F}$ applicata nel punto B; la reazione vincolare $\mathbf{\Phi}_B$. Le equazioni cardinali della statica, scelto B come polo, sono:

$$
\begin{aligned}
&-m\,g\,\widehat{\mathbf{j}} + F\,\widehat{\mathbf{i}} + k(H - A) + \Phi_B\,\widehat{\mathbf{j}} = 0 \\
&(P_0 - B) \times (-m\,g\,\widehat{\mathbf{j}}) + (A - B) \times [k(H - A)] = 0
\end{aligned}
$$

Priettando la prima lungo $\widehat{\mathbf{i}}$ e $\widehat{\mathbf{j}}$ ed esplicitando abbiamo

$$
\begin{aligned}
&\Phi_B - m\,g = 0 \\
&F - k\,(s - L\cos\varphi) = 0 \\
&\frac{m\,g\,L}{2}\cos\varphi + k\,L\,(s - L\cos\varphi)\sin\varphi = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Phi_B = m\,g \\
&k\,(s - L\cos\varphi) = F \\
&\frac{m\,g\,L}{2}\cos\varphi + L\,F\sin\varphi = 0
\end{aligned}
$$

Dall'ultima equazione si vede che $\cos\varphi = 0$ non è soluzione; l'equazione è pertanto equivalente a

$$
\tan\varphi = -\frac{m\,g}{2\,F}
$$

che dà due soluzioni, φ_1 e φ_2 nel II e IV quadrante. I corrispondenti valori di s si ottengono dall'equazione

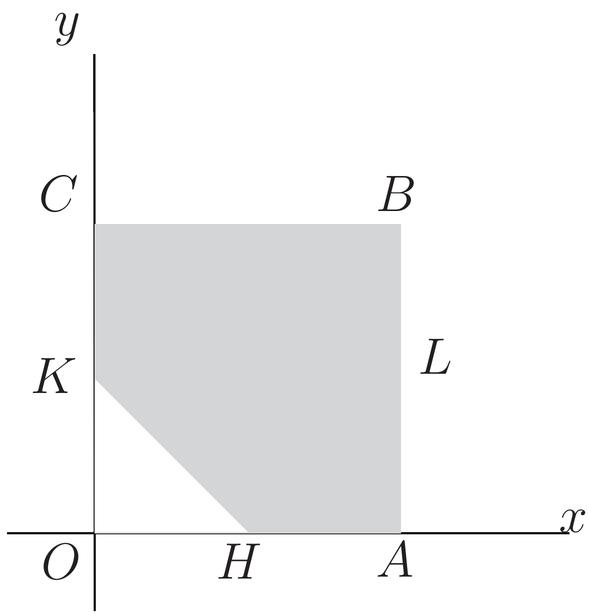
$$
s = L\cos\varphi + \frac{F}{k}
$$

cioè

$$
\begin{aligned}
s_1 &= L\,\cos\varphi_1 + \frac{F}{k} = -\frac{L}{\sqrt{1+(mg/2F)^2}} + \frac{F}{k} \\
s_2 &= L\,\cos\varphi_2 + \frac{F}{k} = \frac{L}{\sqrt{1+(mg/2F)^2}} + \frac{F}{k}
\end{aligned}
$$

Le configurazioni di equilibrio sono quindi (s_1, φ_1) e (s_2, φ_2).

2. Nel sistema di riferimento solidale $O(x, y, z)$, con l'asse z ortogonale al piano della figura, calcolare la matrice d'inerzia della lamina ivi mostrata, avente massa m e costituita dal quadrato $OABC$ di lato L, privato del triangolo rettangolo isoscele OHK, rettangolo in O, con H e K i punti medi dei lati OA e OC.



Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

Svolgimento. Indichiamo con m_1 la massa del quadrato pieno e con m_2 la massa del foro triangolare. Abbiamo

$$m_1 - m_2 = m$$
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{L^2}{L^2/8} = 8$$

Da cui

$$m_2 = \frac{m}{7} \qquad m_1 = \frac{8}{7}\,m$$

Dalla simmetria della figura abbiamo che $I_{11} = I_{22}$ e $I_{33} = I_{11} + I_{22}$. Per il quadrato abbiamo:

$$I_{11} = \sigma \int_0^L \int_0^L y^2\,dx\,dy = \sigma \int_0^L y^2\,L\,dy = \sigma\,\frac{L^4}{3} = \frac{1}{3}\,m_1\,L^2$$
$$I_{12} = -\sigma \int_0^L \int_0^L x\,y\,dx\,dy = -\sigma \int_0^L y\,\frac{L^2}{2}\,dy = -\sigma\,\frac{L^4}{4} = -\frac{1}{4}\,m_1\,L^2$$

Per il triangolo:

$$I_{11} = \sigma \int_0^{L/2} dx \int_0^{L/2-x} y^2\,dy = \sigma \int_0^{L/2} \frac{(L/2-x)^3}{3}\,dx = \sigma \int_0^{L/2} \frac{\xi^3}{3}\,d\xi = \sigma\,\frac{(L/2)^4}{12} =$$
$$= \sigma\,\frac{L^4}{16 \times 12} = \frac{1}{24}\,m_2\,L^2$$
$$I_{12} = -\sigma \int_0^{L/2} dx \int_0^{L/2-x} x\,y\,dy = -\sigma \int_0^{L/2} dx\,x\,\frac{(L/2-x)^2}{2}\,dy =$$
$$= -\frac{1}{2}\,\sigma \int_0^{L/2} x\left(\frac{L^2}{2} + x^2 - L\,x\right)dx = -\sigma\,\frac{L^4}{384} = -\frac{1}{48}\,m_2\,L^2$$

Raccogliendo:

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{1}{3}\, m_1\, L^2 - \frac{1}{24}\, m_2\, L^2 = \frac{1}{3}\, \frac{8}{7}\, m\, L^2 - \frac{1}{24}\, \frac{1}{7}\, m\, L^2 = \frac{1}{7}\, \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{24}\right)\, m\, L^2 = \\
&= \frac{1}{7}\, \frac{63}{24}\, m\, L^2 = \frac{9}{24}\, m\, L^2 = \frac{3}{8}\, m\, L^2 = I_{22} \\
I_{33} &= \frac{3}{4}\, m\, L^2 \\
I_{12} &= -\frac{1}{4}\, m_1\, L^2 + \frac{1}{48}\, m_2\, L^2 = -\frac{1}{4}\, \frac{8}{7}\, m\, L^2 + \frac{1}{48}\, \frac{1}{7}\, m\, L^2 = \frac{1}{7}\, \left(\frac{1}{48} - 2\right)\, m\, L^2 = \\
&= -\frac{95}{48 \times 7}\, m\, L^2 = -\frac{95}{336}\, m\, L^2
\end{aligned}
$$