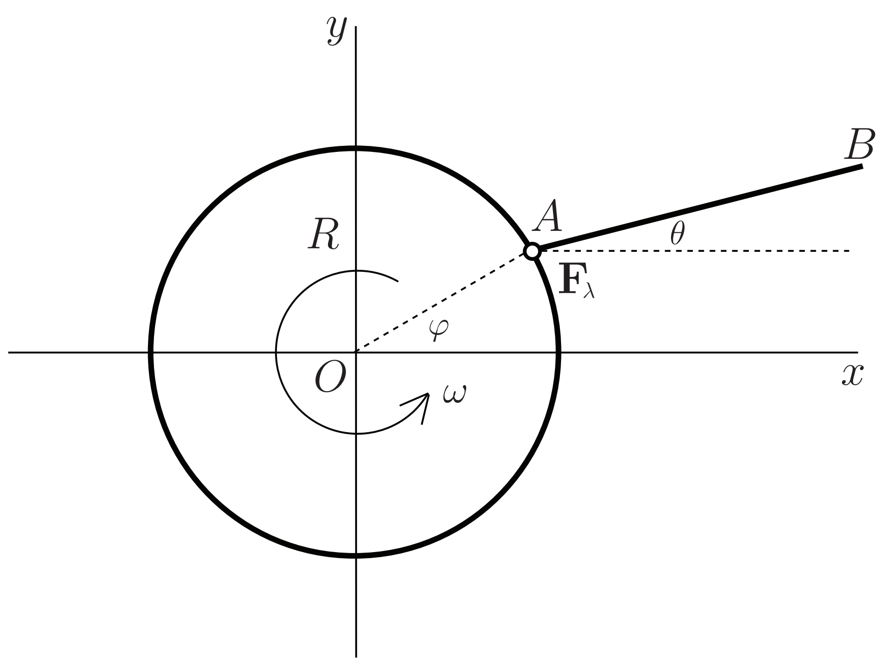
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2019/2020
Meccanica Razionale - Appello del 9/05/2020
Appello svolto in modalità a distanza

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 9 maggio 2020

1. (15 punti) Una circonferenza di raggio R e massa M ruota con velocità angolare $\omega = \omega\,\widehat{\mathbf{k}}$ attorno al suo centro O che è fisso nell'origine del piano verticale $O(x, y)$, con l'asse y verticale ascendente. Sul punto A della circonferenza è incernierata l'asta AB, di lunghezza L e massa m, libera di ruotare attorno ad A. Sul punto A agisce inoltre una forza viscosa di costante di viscosità λ. Utilizzando le coordinate lagrangiane θ e φ indicate in figura, scrivere le equazioni del moto utilizzando le equazioni di Lagrange.



PS.: si possono usare le formule notevoli per il momento d'inerzia di un'asta rispetto ad un asse baricentrale e perpendicolare all'asta, $I_0 = m\,L^2/12$, e per una circonferenza rispetto ad un asse baricentrale e perpendicolare al piano della circonferenza $I_0 = M\,R^2$.

Svolgimento. Energia cinetica della circonferenza:

$$T_C = \frac{1}{2} I\,\omega^2 = \frac{1}{2} M\,R^2\,\omega^2$$

Centro di massa dell'asta:

$$\begin{aligned}
P_0 - O &= \frac{L}{2}\,\left(\widehat{\mathbf{i}}\,\cos\theta + \widehat{\mathbf{j}}\,\sin\theta\right) + R\,\left(\widehat{\mathbf{i}}\,\cos\varphi + \widehat{\mathbf{j}}\,\sin\varphi\right) \\
\mathbf{v}_0 &= \frac{L}{2}\,\dot\theta\,\left(-\widehat{\mathbf{i}}\,\sin\theta + \widehat{\mathbf{j}}\,\cos\theta\right) + R\,\dot\varphi\,\left(-\widehat{\mathbf{i}}\,\sin\varphi + \widehat{\mathbf{j}}\,\cos\varphi\right) \\
\mathbf{v}_0^2 &= \frac{L^2}{4}\,\dot\theta^2 + R^2\,\dot\varphi^2 + R\,L\,\dot\theta\,\dot\varphi\,(\cos\theta\,\cos\varphi + \sin\theta\,\sin\varphi) = \\
&= \frac{L^2}{4}\,\dot\theta^2 + R^2\,\dot\varphi^2 + R\,L\,\dot\theta\,\dot\varphi\,\cos(\theta-\varphi)
\end{aligned}$$

Energia cinetica dell'asta:

$$\begin{aligned}
T_a &= \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + \frac{1}{2}I\,\dot\theta^2 = \\
&= \frac{1}{2}\,m\,\left[\frac{L^2}{4}\,\dot\theta^2 + R^2\,\dot\varphi^2 + R\,L\,\dot\theta\,\dot\varphi\,\cos(\theta-\varphi)\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{12}\,m\,L^2\,\dot\theta^2 = \\
&= \frac{1}{2}\,m\,\left[\frac{L^2}{3}\,\dot\theta^2 + R^2\,\dot\varphi^2 + R\,L\,\dot\theta\,\dot\varphi\,\cos(\theta-\varphi)\right]
\end{aligned}$$

Energia cinetica totale:

$$T = T_C + T_a = \frac{1}{2}M\,R^2\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,m\,\left[\frac{L^2}{3}\,\dot\theta^2 + R^2\,\dot\varphi^2 + R\,L\,\dot\theta\,\dot\varphi\,\cos(\theta-\varphi)\right]$$

All'energia potenziale contribuisce solo l'asta:

$$V = m\,g\,y_0 = m\,g\,(R\,\sin\varphi + \frac{L}{2}\,\sin\theta)$$

Punto A:

$$\begin{aligned}
A - O &= R\,\left(\widehat{\mathbf{i}}\,\cos\varphi + \widehat{\mathbf{j}}\,\sin\varphi\right) \\
\mathbf{v}_A &= R\,\dot\varphi\,\left(-\widehat{\mathbf{i}}\,\sin\varphi + \widehat{\mathbf{j}}\,\cos\varphi\right)
\end{aligned}$$

Forze non conservative e forze generalizzate di Lagrange:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_\lambda &= -\lambda\,\mathbf{v}_A = -\lambda\,R\,\dot\varphi\,\left(-\widehat{\mathbf{i}}\,\sin\varphi + \widehat{\mathbf{j}}\,\cos\varphi\right) \\
Q_\theta &= \mathbf{F}_\lambda\cdot\frac{\partial A}{\partial\theta} = 0 \\
Q_\varphi &= \mathbf{F}_\lambda\cdot\frac{\partial A}{\partial\varphi} = -\lambda\,R\,\dot\varphi\,\left(-\widehat{\mathbf{i}}\,\sin\varphi + \widehat{\mathbf{j}}\,\cos\varphi\right)\cdot R\,\dot\varphi\,\left(-\widehat{\mathbf{i}}\,\sin\varphi + \widehat{\mathbf{j}}\,\cos\varphi\right) = \\
&= -\lambda\,R^2\,\dot\varphi
\end{aligned}$$

Lagrangiana

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L} = T - V \\
&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{1}{2}\,m\,R\,L\,\dot\theta\,\dot\varphi\,\sin(\theta-\varphi) - m\,g\,\frac{L}{2}\,\cos\theta \\
&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = \frac{1}{3}\,m\,L^2\,\dot\theta + \frac{1}{2}\,m\,R\,L\,\dot\varphi\,\cos(\theta-\varphi) \\
&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{1}{2}\,m\,R\,L\,\dot\theta\,\dot\varphi\,\sin(\theta-\varphi) - m\,g\,R\,\cos\varphi \\
&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = m\,R^2\,\dot\varphi + \frac{1}{2}\,m\,R\,L\,\dot\theta\,\cos(\theta-\varphi)
\end{aligned}$$

Equazioni di Lagrange:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\, m\, L^2\, \ddot{\theta} + \frac{1}{2}\, m\, R\, L\, \left[\ddot{\varphi}\, \cos(\theta-\varphi) - \dot{\varphi}\, (\dot{\theta}-\dot{\varphi})\, \sin(\theta-\varphi)\right] + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\, m\, R\, L\, \dot{\theta}\, \dot{\varphi}\, \sin(\theta-\varphi) + m\, g\, \frac{L}{2}\, \cos\theta = 0 \\
&m\, R^2\, \ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\, m\, R\, L\, \left[\ddot{\theta}\, \cos(\theta-\varphi) - \dot{\theta}\, (\dot{\theta}-\dot{\varphi})\, \sin(\theta-\varphi)\right] - \\
&\qquad \frac{1}{2}\, m\, R\, L\, \dot{\theta}\, \dot{\varphi}\, \sin(\theta-\varphi) + m\, g\, R\, \cos\varphi = -\lambda\, R^2\, \dot{\varphi}
\end{aligned}
$$

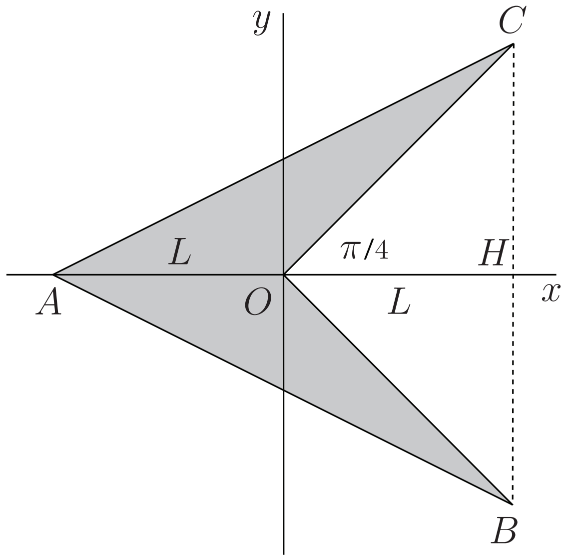
Semplificando:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\, m\, L^2\, \ddot{\theta} + \frac{1}{2}\, m\, R\, L\, \left[\ddot{\varphi}\, \cos(\theta-\varphi) + \dot{\varphi}^2\, \sin(\theta-\varphi)\right] + m\, g\, \frac{L}{2}\, \cos\theta = 0 \\
&m\, R^2\, \ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\, m\, R\, L\, \left[\ddot{\theta}\, \cos(\theta-\varphi) - \dot{\theta}^2\, \sin(\theta-\varphi)\right] + m\, g\, R\, \cos\varphi = -\lambda\, R^2\, \dot{\varphi}
\end{aligned}
$$

Siccome la circonferenza ruota con velocità costante abbiamo $\dot{\varphi} = \omega$ e $\ddot{\varphi} = 0$. Quindi:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\, m\, L^2\, \ddot{\theta} + \frac{1}{2}\, m\, R\, L\, \omega^2\, \sin(\theta-\varphi) + m\, g\, \frac{L}{2}\, \cos\theta = 0 \\
&\frac{1}{2}\, m\, R\, L\, \left[\ddot{\theta}\, \cos(\theta-\varphi) - \dot{\theta}^2\, \sin(\theta-\varphi)\right] + m\, g\, R\, \cos\varphi = -\lambda\, R^2\, \omega
\end{aligned}
$$

2. (15 punti) Calcolare la matrice d'inerzia della lamina piana di massa M mostrata in figura, dove $\overline{AO} = \overline{OH} = L$ e $C - O$ e $B - O$ formano angoli di $\pi/4$ con l'asse x.



Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

Svolgimento. Notiamo che il piano (x, z) è di simmetria materiale, quindi l'asse y è principale d'inerzia e quindi $I_{12} = 0$. Per il calcolo dei restanti elementi della matrice è conveniente riguardare il dominio come normale rispetto ad y. Inoltre, data la simmetria della figura, basta calcolare gli integrali sulla metà del dominio ad $y \geq 0$ e quindi raddoppiare. le equazioni delle rette su cui giacciono i lati AC ed OC sono rispettivamente

$$\begin{aligned} y &= x \quad \text{ovvero} \quad x = y \\ y &= \frac{x + L}{2} \quad \text{ovvero} \quad x = 2\,y - L \end{aligned}$$

Il dominio della figura ad $y \geq 0$ è quindi:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq L, \quad 2\,y - L \leq x \leq y\}$$

Inoltre, l'area della figura è L^2. Quindi:

$$\begin{aligned} I_{11} &= 2\,\sigma \int_0^L \left\{ \int_{2\,y-L}^{y} y^2\,dx \right\} dy = 2\,\sigma \int_0^L y^2\,(L - y)\,dy = \\ &= 2\,\sigma \left(L\,\frac{L^3}{3} - \frac{L^4}{4} \right) = 2\,\sigma\,\frac{1}{12}\,L^4 = \frac{1}{6}\,M\,L^2 \\ I_{22} &= 2\,\sigma \int_0^L \left\{ \int_{2\,y-L}^{y} x^2\,dx \right\} dy = 2\,\sigma \int_0^L \left[\frac{y^3}{3} - \frac{(2\,y - L)^3}{3} \right] dy = \\ &= 2\,\sigma \left\{ \frac{L^4}{12} - \frac{1}{3} \int_{-L}^{L} z^3\,\frac{dz}{2} \right\} = 2\,\sigma \left\{ \frac{L^4}{12} - 0 \right\} = \frac{1}{6}\,M\,L^2 \\ I_{33} &= I_{11} + I_{22} = \frac{1}{3}\,M\,L^2 \end{aligned}$$