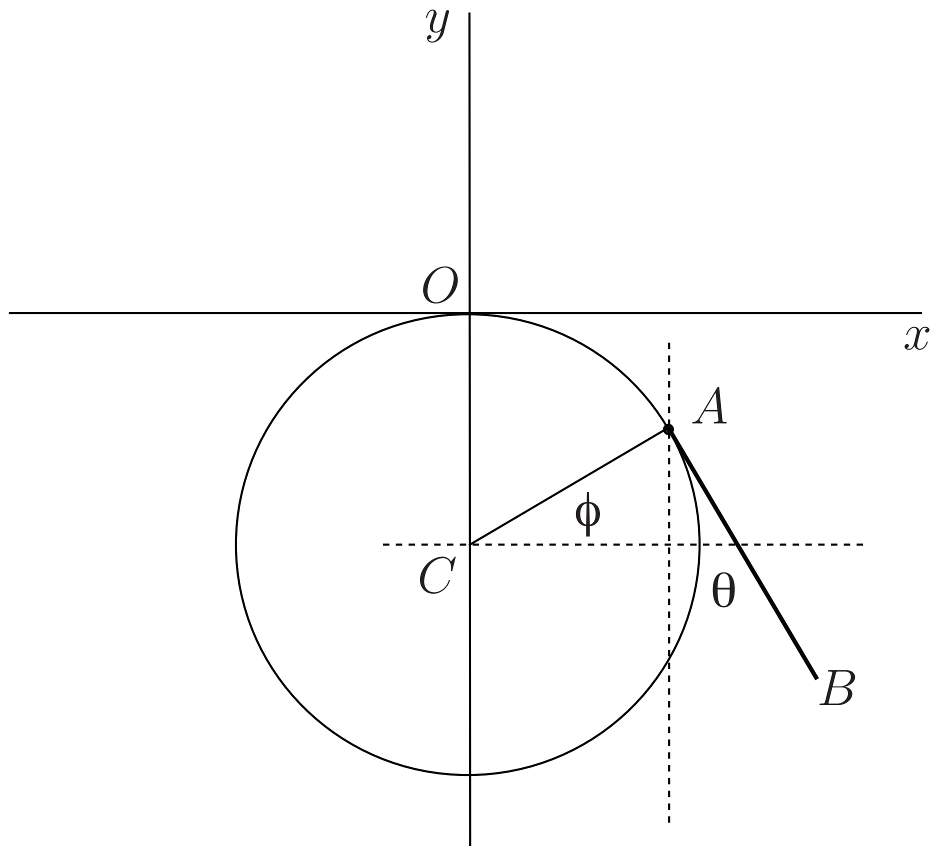
Soluzioni di alcuni degli esercizi dell'appello di luglio 2019. Le soluzioni dei rimanenti esercizi si ottengono seguendo gli stessi procedimenti "mutatis mutandis".

1. Un'asta AB di massa M e lunghezza L si muove nel piano verticale $O(x, y)$ (con y verticale ascendente), libera di ruotare attorno al suo estremo A che scorre senza attrito sulla circonferenza di raggio R e centro $C = (0, -R)$. Sull'estremo A dell'asta agisce una forza viscosa di costante $\lambda > 0$. Utilizzando le coordinate lagrangiane φ (angolo del vettore $A - C$ con l'orizzontale) e θ (angolo dell'asta con la verticale) indicate in figura, scrivere le equazioni di Lagrange per l'asta.



Soluzione. L'energia cinetica si ottiene dal teorema di König:

$$T = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

dove v_0 è la velocità del centro di massa, $\omega = \dot{\theta} \widehat{\mathbf{k}}$ la velocità angolare e $I = M L^2/12$ il momento d'inerzia dell'asta rispetto ad un asse ortogonale all'asta e passante per il centro di massa. Abbiamo:

$$P_0 - O = \left(R \cos\varphi + \frac{L}{2} \sin\theta \right) \widehat{\mathbf{i}} + \left(-R + R \sin\varphi - \frac{L}{2} \cos\theta \right) \widehat{\mathbf{j}}$$

$$v_0 = \left(-R \dot{\varphi} \sin\varphi + \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos\theta \right) \widehat{\mathbf{i}} + \left(R \dot{\varphi} \cos\varphi + \frac{L}{2} \dot{\theta} \sin\theta \right) \widehat{\mathbf{j}}$$

e quindi

$$T = \frac{1}{2}\,M\,\left\{R^2\,\dot\varphi^2 + \frac{L^2}{4}\,\dot\theta^2 + R\,L\,\dot\varphi\,\dot\theta\,\sin(\theta-\varphi)\right\} + \frac{1}{24}\,M\,L^2\,\dot\theta^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\,M\,\left\{R^2\,\dot\varphi^2 + \frac{L^2}{3}\,\dot\theta^2 + R\,L\,\dot\varphi\,\dot\theta\,\sin(\theta-\varphi)\right\}$$

L'energia potenziale comprende solo la forza peso, in quanto la forza viscosa non è conservativa:

$$V = M\,g\,y_0 = M\,g\,\left(-R + R\,\sin\varphi - \frac{L}{2}\,\cos\theta\right)$$

La Lagrangiana è pertanto

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\,M\,\left\{R^2\,\dot\varphi^2 + \frac{L^2}{3}\,\dot\theta^2 + R\,L\,\dot\varphi\,\dot\theta\,\sin(\theta-\varphi)\right\} - M\,g\,\left(-R + R\,\sin\varphi - \frac{L}{2}\,\cos\theta\right)$$

Le sue derivate sono:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} &= M\,R^2\,\dot\varphi + \frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\dot\theta\,\sin(\theta-\varphi)\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} &= M\,\frac{L^2}{3}\,\dot\theta + \frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\dot\varphi\,\sin(\theta-\varphi)\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= -\frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\dot\varphi\,\dot\theta\,\cos(\theta-\varphi) - M\,g\,R\,\cos\varphi\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} &= \frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\dot\varphi\,\dot\theta\,\cos(\theta-\varphi) - M\,g\,\frac{L}{2}\,\sin\theta
\end{aligned}$$

La forza non conservativa viene rappresentata nelle equazioni di Lagrange mediante le forze generalizzate lagrangiane. La forza viscosa è data da:

$$\mathbf{F}_\lambda = -\lambda\,\mathbf{v}_A$$

Per il punto A abbiamo:

$$\begin{aligned}
A - O &= R\,\left(\hat{\mathbf{i}}\,\cos\varphi - (1-\sin\varphi)\,\hat{\mathbf{j}}\right)\\
\mathbf{v}_A &= R\,\dot\varphi\,\left(-\hat{\mathbf{i}}\,\sin\varphi + \hat{\mathbf{j}}\,\cos\varphi\right)
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
Q_\varphi &= \mathbf{F}_\lambda\cdot\frac{\partial A}{\partial\varphi} = -\lambda\,R^2\,\dot\varphi\,\left(-\hat{\mathbf{i}}\,\sin\varphi + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{j}}\right)\cdot\left(-\hat{\mathbf{i}}\,\sin\varphi + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{j}}\right) = -\lambda\,R^2\,\dot\varphi\\
Q_\theta &= \mathbf{F}_\lambda\cdot\frac{\partial A}{\partial\theta} = 0
\end{aligned}$$

Le equazioni di Lagrange

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= Q_\varphi\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} &= Q_\theta
\end{aligned}$$

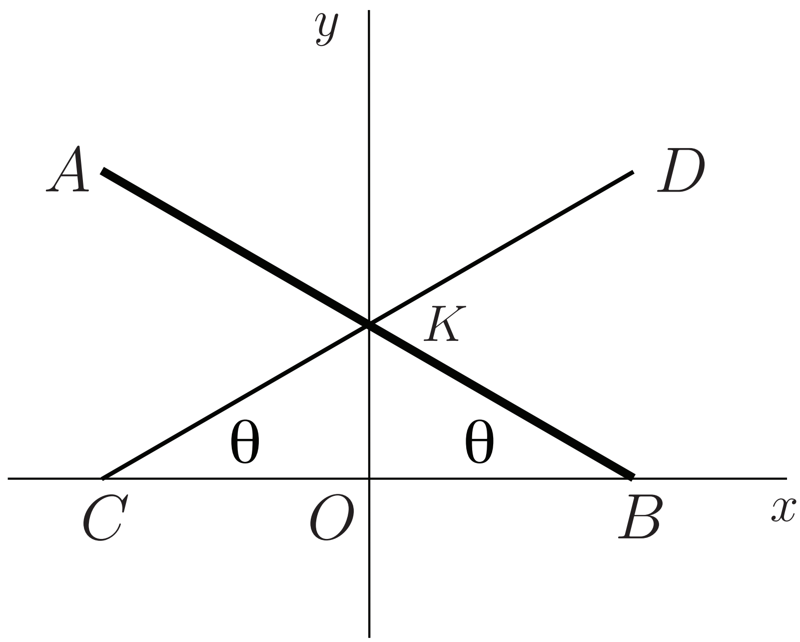
diventano:

$$M\,R^2\,\ddot\varphi + \frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\left\{\ddot\theta\,\sin(\theta-\varphi) + \dot\theta\,(\dot\theta-\dot\varphi)\,\cos(\theta-\varphi)\right\} +$$
$$+\frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\dot\varphi\,\dot\theta\,\cos(\theta-\varphi) + M\,g\,R\,\cos\varphi = -\lambda\,R^2\,\dot\varphi$$
$$M\,\frac{L^2}{3}\,\ddot\theta + \frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\left\{\ddot\varphi\,\sin(\theta-\varphi) + \dot\varphi\,(\dot\theta-\dot\varphi)\,\cos(\theta-\varphi)\right\} -$$
$$-\frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\dot\varphi\,\dot\theta\,\cos(\theta-\varphi) + M\,g\,\frac{L}{2}\,\sin\theta = 0$$

che, semplificando, diventano:

$$M\,R^2\,\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\left\{\ddot{\theta}\,\sin(\theta-\varphi)+\dot{\theta}^2\,\cos(\theta-\varphi)\right\}+M\,g\,R\,\cos\varphi=-\lambda\,R^2\,\dot{\varphi}$$
$$M\,\frac{L^2}{3}\,\ddot{\theta}+\frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\{\ddot{\varphi}\,\sin(\theta-\varphi)-\dot{\varphi}^2\,\cos(\theta-\varphi)\}+M\,g\,\frac{L}{2}\,\sin\theta=0$$

2. Nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura, calcolare la matrice d'inerzia di una croce formata da due aste AB e CD di massa $2\,m$ ed m, ugual lunghezza L, disposte simmetricamente rispetto all'asse y e giacenti interamente nel semipiano $y \geq 0$. Le aste si intersecano nel punto medio comune K, che sta sull'asse y, mentre gli estremi A e D appartengono all'asse x. Le due aste formano un angolo $\theta = \pi/6$ con l'asse x.



Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

Soluzione. Il punto K è il centro di massa del sistema, per cui la strategia più semplice è quella di calcolare la matrice d'inerzia in un sistema di riferimento $O'(x', y')$ con $O' = K$, l'asse x' parallelo all'asse x e l'asse y inalterato, cioè $y' = y$. Indichiamo con $\overline{I}$ la matrice d'inerzia in tale sistema. Abbiamo per l'asta CD:

$$\overline{I}_{11}^{CD} = \mu \int_{-L/2}^{L/2} y^2\, dl = \mu \int_{-L/2}^{L/2} \left[l\, \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^2 dl = \mu \left[\frac{l^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4} = \mu\, \frac{L^3}{48} = \frac{1}{48}\, M\, L^2$$

$$\overline{I}_{22}^{CD} = \mu \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, dl = \mu \int_{-L/2}^{L/2} \left[l\, \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^2 dl = \mu \left[\frac{l^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} \frac{3}{4} = \mu\, \frac{L^3}{16} = \frac{1}{16}\, M\, L^2$$

$$\overline{I}_{12}^{CD} = -\mu \int_{-L/2}^{L/2} x\, y\, dl = -\mu \int_{-L/2}^{L/2} l^2\, \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) dl = -\mu \left[\frac{l^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} \frac{\sqrt{3}}{2}\, \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{48}\, M\, L^2$$

$$\overline{I}_{33}^{CD} = \overline{I}_{11}^{CD} + \overline{I}_{22}^{CD} = \frac{1}{12}\, M\, L^2$$

Queste espressioni sono del tutto consistenti con le espressioni per i momenti d'inerzia di un'asta viste a lezione.

Per l'asta AB le espressioni sono analoghe, tranne che per la massa che è doppia e per I_{12} che avrà segno opposto:

$$
\begin{aligned}
\overline{I}_{11}^{AB} &= \mu \int_{-L/2}^{L/2} y^2\, dl = \mu \int_{-L/2}^{L/2} \left[l \,\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^2 \, dl = \mu \, \left[\frac{l^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4} = \mu \, \frac{L^3}{48} = \frac{1}{24}\, M\, L^2 \\
\overline{I}_{22}^{AB} &= \mu \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, dl = \mu \int_{-L/2}^{L/2} \left[l \,\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^2 \, dl = \mu \, \left[\frac{l^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} \frac{3}{4} = \mu \, \frac{L^3}{16} = \frac{1}{8}\, M\, L^2 \\
\overline{I}_{12}^{AB} &= -\mu \int_{-L/2}^{L/2} x\, y\, dl = -\mu \int_{-L/2}^{L/2} l^2 \,\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \,\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \, dl = \mu \, \left[\frac{l^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} \frac{\sqrt{3}}{2}\, \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24}\, M\, L^2 \\
\overline{I}_{33}^{AB} &= \overline{I}_{11}^{AB} + \overline{I}_{22}^{AB} = \frac{1}{6}\, M\, L^2
\end{aligned}
$$

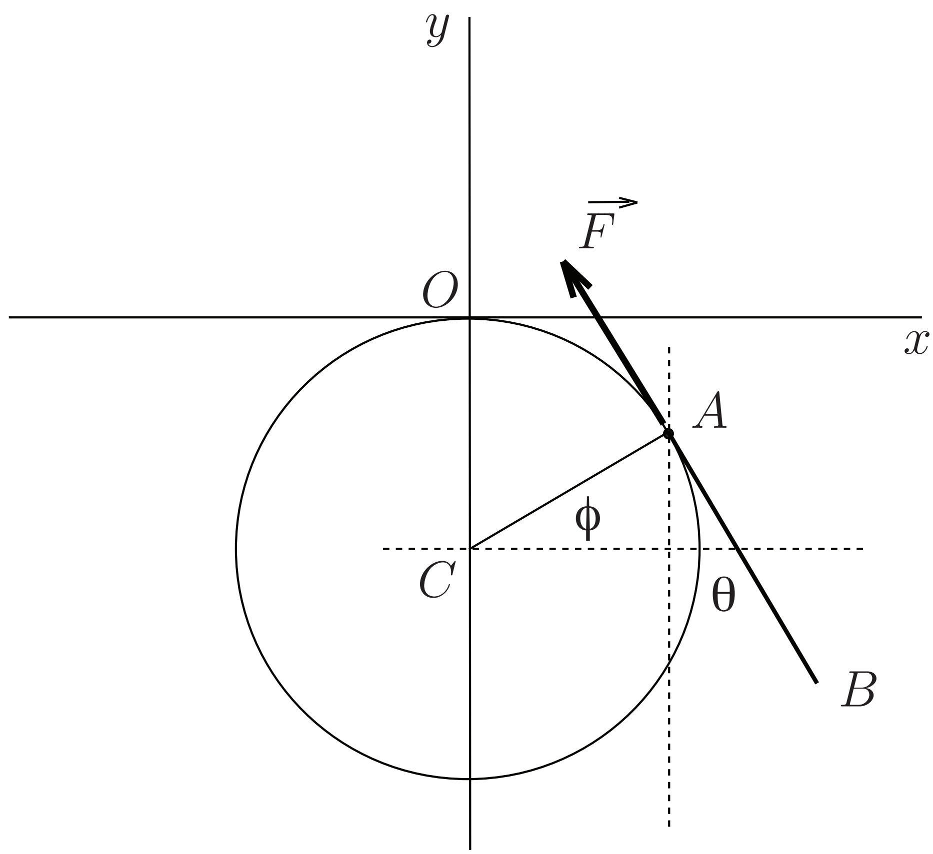
La matrice d'inerzia della croce è quindi la somma delle matrici delle due aste:

$$
\begin{aligned}
\overline{I}_{11} &= \overline{I}_{11}^{CD} + \overline{I}_{11}^{AB} = \frac{1}{16}\, M\, L^2 \\
\overline{I}_{22} &= \overline{I}_{22}^{CD} + \overline{I}_{22}^{AB} = \frac{3}{16}\, M\, L^2 \\
\overline{I}_{12} &= \overline{I}_{12}^{CD} + \overline{I}_{12}^{AB} = \frac{\sqrt{3}}{48}\, M\, L^2 \\
\overline{I}_{33} &= \overline{I}_{33}^{CD} + \overline{I}_{33}^{AB} = \frac{1}{4}\, M\, L^2
\end{aligned}
$$

Per ottenere la matrice d'inerzia nel sistema dato $O(x, y)$ usiamo il teorema di Huygens:

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \overline{I}_{11} + M\, \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}\, M\, L^2 \\
I_{22} &= \overline{I}_{22} = \frac{3}{16}\, M\, L^2 \\
I_{12} &= \overline{I}_{12} = \frac{\sqrt{3}}{48}\, M\, L^2 \\
I_{33} &= \overline{I}_{33} + M\, \left(\frac{L}{4}\right)^2 = I_{11} + I_{22} = \frac{5}{16}\, M\, L^2
\end{aligned}
$$

3. Un'asta AB di massa M e lunghezza L si muove nel piano verticale $O(x, y)$ (con y verticale ascendente), libera di ruotare attorno al suo estremo A che scorre senza attrito sulla circonferenza di raggio R e centro $C = (0, -R)$. Sull'estremo A dell'asta agisce una forza di modulo costante F diretta tangenzialmente alla circonferenza nel verso antiorario. Utilizzando le coordinate lagrangiane φ (angolo del vettore $A - C$ con l'orizzontale) e θ (angolo dell'asta con la verticale) indicate in figura, scrivere le equazioni di Lagrange per l'asta.



Soluzione. L'energia cinetica si ottiene dal teorema di König:

$$T = \frac{1}{2}\, M\, v_0^2 + \frac{1}{2}\, I\, \omega^2$$

dove v_0 è la velocità del centro di massa, $\omega = \dot\theta\, \widehat{\mathbf{k}}$ la velocità angolare e $I = M\, L^2/12$ il momento d'inerzia dell'asta rispetto ad un asse ortogonale all'asta e passante per il centro di massa. Abbiamo:

$$P_0 - O = \left(R\,\cos\varphi + \frac{L}{2}\,\sin\theta\right)\widehat{\mathbf{i}} + \left(-R + R\,\sin\varphi - \frac{L}{2}\,\cos\theta\right)\widehat{\mathbf{j}}$$

$$v_0 = \left(-R\,\dot\varphi\,\sin\varphi + \frac{L}{2}\,\dot\theta\,\cos\theta\right)\widehat{\mathbf{i}} + \left(R\,\dot\varphi\,\cos\varphi + \frac{L}{2}\,\dot\theta\,\sin\theta\right)\widehat{\mathbf{j}}$$

e quindi

$$T = \frac{1}{2}\, M\, \left\{R^2\,\dot\varphi^2 + \frac{L^2}{4}\,\dot\theta^2 + R\,L\,\dot\varphi\,\dot\theta\,\sin(\theta - \varphi)\right\} + \frac{1}{24}\, M\, L^2\,\dot\theta^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\, M\, \left\{R^2\,\dot\varphi^2 + \frac{L^2}{3}\,\dot\theta^2 + R\,L\,\dot\varphi\,\dot\theta\,\sin(\theta - \varphi)\right\}$$

L'energia potenziale comprende solo la forza peso, in quanto la forza $\mathbf{F}$ non è conservativa:

$$V = M\,g\,y_0 = M\,g\,\left(-R + R\,\sin\varphi - \frac{L}{2}\,\cos\theta\right)$$

La Lagrangiana è pertanto

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\,M\,\left\{R^2\,\dot\varphi^2 + \frac{L^2}{3}\,\dot\theta^2 + R\,L\,\dot\varphi\,\dot\theta\,\sin(\theta-\varphi)\right\} - M\,g\,\left(-R + R\,\sin\varphi - \frac{L}{2}\,\cos\theta\right)$$

Le sue derivate sono:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} &= M\,R^2\,\dot\varphi + \frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\dot\theta\,\sin(\theta-\varphi)\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} &= M\,\frac{L^2}{3}\,\dot\theta + \frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\dot\varphi\,\sin(\theta-\varphi)\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= -\frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\dot\varphi\,\dot\theta\,\cos(\theta-\varphi) - M\,g\,R\,\cos\varphi\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} &= \frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\dot\varphi\,\dot\theta\,\cos(\theta-\varphi) - M\,g\,\frac{L}{2}\,\sin\theta
\end{aligned}$$

La forza non conservativa viene rappresentata nelle equazioni di Lagrange mediante le forze generalizzate lagrangiane. Essa è data da:

$$\mathbf{F} = F\,(-\widehat{\mathbf{i}}\,\sin\varphi + \widehat{\mathbf{j}}\,\cos\varphi)$$

Per il punto A abbiamo:

$$A - O = R\,\left(\widehat{\mathbf{i}}\,\cos\varphi - (1-\sin\varphi)\,\widehat{\mathbf{j}}\right)$$

e quindi

$$\begin{aligned}
Q_\varphi &= \mathbf{F}\cdot\frac{\partial A}{\partial\varphi} = F\,R\,(-\widehat{\mathbf{i}}\,\sin\varphi + \widehat{\mathbf{j}}\,\cos\varphi)\cdot\left(-\widehat{\mathbf{i}}\,\sin\varphi + \cos\varphi\,\widehat{\mathbf{j}}\right) = F\,R\\
Q_\theta &= F\,(-\widehat{\mathbf{i}}\,\sin\varphi + \widehat{\mathbf{j}}\,\cos\varphi)\cdot\frac{\partial A}{\partial\theta} = 0
\end{aligned}$$

Le equazioni di Lagrange

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= Q_\varphi\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} &= Q_\theta
\end{aligned}$$

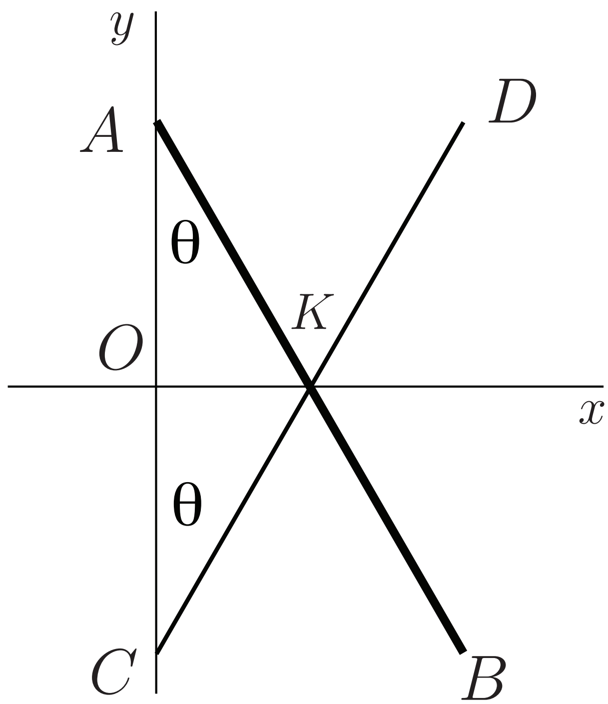
diventano:

$$\begin{aligned}
&M\,R^2\,\ddot\varphi + \frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\left\{\ddot\theta\,\sin(\theta-\varphi) + \dot\theta\,(\dot\theta-\dot\varphi)\,\cos(\theta-\varphi)\right\} +\\
&\qquad + \frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\dot\varphi\,\dot\theta\,\cos(\theta-\varphi) + M\,g\,R\,\cos\varphi = F\,R\\
&M\,\frac{L^2}{3}\,\ddot\theta + \frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\left\{\ddot\varphi\,\sin(\theta-\varphi) + \dot\varphi\,(\dot\theta-\dot\varphi)\,\cos(\theta-\varphi)\right\} -\\
&\qquad - \frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\dot\varphi\,\dot\theta\,\cos(\theta-\varphi) + M\,g\,\frac{L}{2}\,\sin\theta = 0
\end{aligned}$$

che, semplificando, diventano:

$$\begin{aligned}
&M\,R^2\,\ddot\varphi + \frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\left\{\ddot\theta\,\sin(\theta-\varphi) + \dot\theta^2\,\cos(\theta-\varphi)\right\} + M\,g\,R\,\cos\varphi = F\,R\\
&M\,\frac{L^2}{3}\,\ddot\theta + \frac{1}{2}\,M\,R\,L\,\left\{\ddot\varphi\,\sin(\theta-\varphi) - \dot\varphi^2\,\cos(\theta-\varphi)\right\} + M\,g\,\frac{L}{2}\,\sin\theta = 0
\end{aligned}$$

4. Nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura, calcolare la matrice d'inerzia di una croce formata da due aste AB e CD di massa $2\,m$ ed m, ugual lunghezza L, disposte simmetricamente rispetto all'asse x e giacenti interamente nel semipiano $x \geq 0$. Le aste si intersecano nel punto medio comune K, che sta sull'asse x, mentre gli estremi A e C appartengono all'asse y. Le due aste formano un angolo $\theta = \pi/6$ con l'asse y.



Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

Soluzione. Il punto K è il centro di massa del sistema, per cui la strategia più semplice è quella di calcolare la matrice d'inerzia in un sistema di riferimento $O'(x', y')$ con $O' = K$, l'asse y' parallelo all'asse y e l'asse x inalterato, cioè $x' = x$. Indichiamo con $\overline{I}$ la matrice d'inerzia in tale sistema. Abbiamo per l'asta CD:

$$\overline{I}_{11}^{CD} = \mu \int_{-L/2}^{L/2} y^2\, dl = \mu \int_{-L/2}^{L/2} \left[l \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]^2 dl = \mu \left[\frac{l^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} \frac{3}{4} = \mu \frac{L^3}{16} = \frac{1}{16} M\, L^2$$

$$\overline{I}_{22}^{CD} = \mu \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, dl = \mu \int_{-L/2}^{L/2} \left[l \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]^2 dl = \mu \left[\frac{l^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4} = \mu \frac{L^3}{48} = \frac{1}{48} M\, L^2$$

$$\overline{I}_{12}^{CD} = -\mu \int_{-L/2}^{L/2} x\, y\, dl = -\mu \int_{-L/2}^{L/2} l^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) dl = -\mu \left[\frac{l^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} \frac{\sqrt{3}}{2}\, \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{48} M\, L^2$$

$$\overline{I}_{33}^{CD} = \overline{I}_{11}^{CD} + \overline{I}_{22}^{CD} = \frac{1}{12} M\, L^2$$

Queste espressioni sono del tutto consistenti con le espressioni per i momenti d'inerzia di un'asta viste a lezione.

Per l'asta AB le espressioni sono analoghe, tranne che per la massa che è doppia e per I_{12} che avrà segno opposto:

$$\overline{I}_{11}^{AB} = \mu \int_{-L/2}^{L/2} y^2 \, dl = \mu \int_{-L/2}^{L/2} \left[l \, \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^2 \, dl = \mu \, \left[\frac{l^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} \frac{3}{4} = \mu \, \frac{L^3}{16} = \frac{1}{8} \, M \, L^2$$

$$\overline{I}_{22}^{AB} = \mu \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \, dl = \mu \int_{-L/2}^{L/2} \left[l \, \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^2 \, dl = \mu \, \left[\frac{l^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4} = \mu \, \frac{L^3}{48} = \frac{1}{24} \, M \, L^2$$

$$\overline{I}_{12}^{AB} = -\mu \int_{-L/2}^{L/2} x \, y \, dl = -\mu \int_{-L/2}^{L/2} l^2 \, \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \, \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \, dl = \mu \, \left[\frac{l^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} \frac{\sqrt{3}}{2} \, \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24} \, M \, L^2$$

$$\overline{I}_{33}^{AB} = \overline{I}_{11}^{AB} + \overline{I}_{22}^{AB} = \frac{1}{6} \, M \, L^2$$

La matrice d'inerzia della croce è quindi la somma delle matrici delle due aste:

$$\overline{I}_{11} = \overline{I}_{11}^{CD} + \overline{I}_{11}^{AB} = \frac{3}{16} \, M \, L^2$$

$$\overline{I}_{22} = \overline{I}_{22}^{CD} + \overline{I}_{22}^{AB} = \frac{1}{16} \, M \, L^2$$

$$\overline{I}_{12} = \overline{I}_{12}^{CD} + \overline{I}_{12}^{AB} = \frac{\sqrt{3}}{48} \, M \, L^2$$

$$\overline{I}_{33} = \overline{I}_{33}^{CD} + \overline{I}_{33}^{AB} = \frac{1}{4} \, M \, L^2$$

Per ottenere la matrice d'inerzia nel sistema dato $O(x, y)$ usiamo il teorema di Huygens:

$$I_{11} = \overline{I}_{11} = \frac{3}{16} \, M \, L^2$$

$$I_{22} = \overline{I}_{22} + M \, \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} \, M \, L^2$$

$$I_{12} = \overline{I}_{12} = \frac{\sqrt{3}}{48} \, M \, L^2$$

$$I_{33} = \overline{I}_{33} + M \, \left(\frac{L}{4}\right)^2 = I_{11} + I_{22} = \frac{5}{16} \, M \, L^2$$