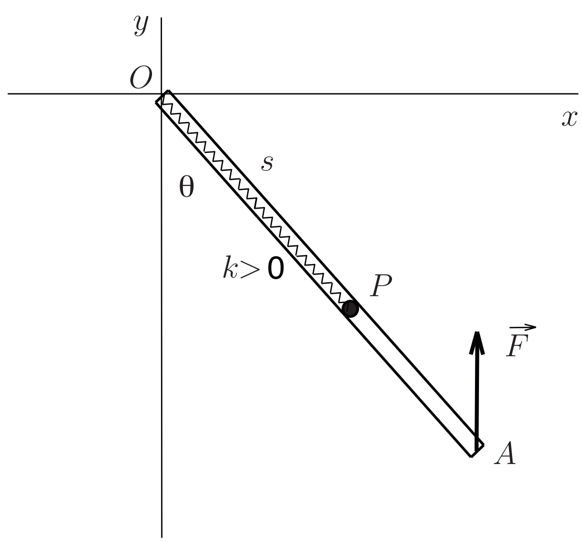
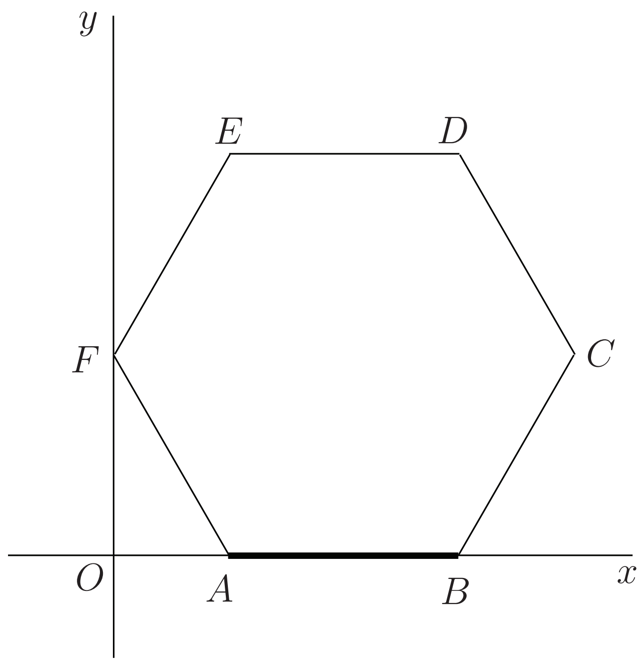
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2018/2019
Meccanica Razionale - Appello del 13/4/2019

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 13 aprile 2019

1. Un'asta OA di massa M e lunghezza L si muove nel piano verticale $O(x, y)$ (con y verticale ascendente), libera di ruotare attorno al suo estremo O che è fisso. Nell'asta è praticata una scanalatura, nel senso della lunghezza, all'interno della quale scorre senza attrito una pallina P di massa m, collegata all'estremo O da una molla di costante $k > 0$. Una forza costante $\mathbf{F} = F\widehat{\mathbf{j}}$ agisce inoltre sull'estremo A dell'asta. Utilizzando le coordinate lagrangiane s (ascissa di P lungo l'asta) e θ (angolo dell'asta con la verticale) indicate in figura, determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità per valori generici dei parametri; determinare quindi un intervallo per F nel quale le configurazioni di equilibrio incondizionate sono stabili.



2. (15 punti) Nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura, calcolare la matrice d'inerzia di un contorno esagonale regolare non omogeneo $ABCDEA$ di massa M e lato L. Il lato AB, che ha massa quadrupla degli altri lati, giace sull'asse x ed il vertice F appartiene all'asse y. Indicare con m_1 la massa di AB e con m_2 la massa di ciascuno degli altri lati; esprimere gli elementi della matrice d'inerzia dapprima in funzione di m_1 ed m_2, sostituendo solo alla fine le loro espressioni in funzione di M.

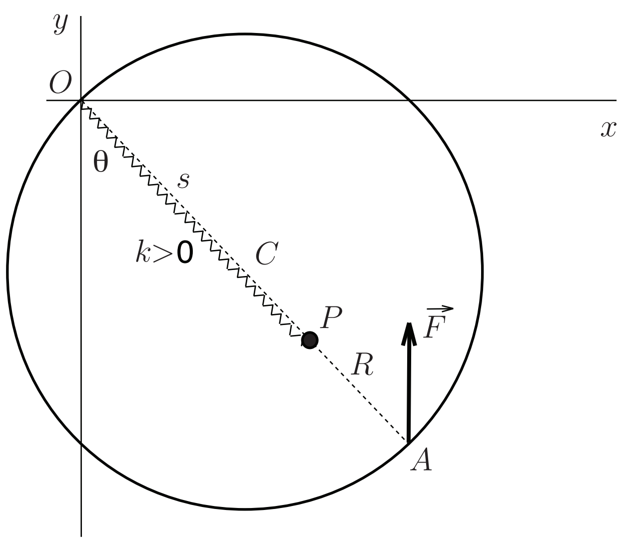


Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Appello del 13/4/2019

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 13 aprile 2019

1. Una circonferenza di centro C, raggio R e massa M si muove nel piano verticale $O(x, y)$ (con y verticale ascendente), libera di ruotare attorno ad un suo punto O che è fisso. Sul diametro OA (privo di massa) scorre senza attrito una pallina P di massa m, collegata al punto O da una molla di costante $k > 0$. Una forza costante $\mathbf{F} = F\widehat{\mathbf{j}}$ agisce inoltre sul punto A. Utilizzando le coordinate lagrangiane s (ascissa di P lungo il diametro OA) e θ (angolo del diametro OA con la verticale) indicate in figura, determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità per valori generici dei parametri; determinare quindi un intervallo per F nel quale le configurazioni di equilibrio incondizionate sono stabili.



Svolgimento. L'energia potenziale è data da

$$V(s, \theta) = M\,g\,y_C + m\,g\,y_P + \frac{1}{2}\,k\,\overline{OC}^2 - F\,y_A =$$
$$= -M\,g\,R\,\cos\theta - m\,g\,s\,\cos\theta + \frac{1}{2}\,k\,s^2 + 2\,F\,R\,\cos\theta$$

Derivate dell'energia potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -m\,g\,\cos\theta + k\,s \tag{1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = (m\,g\,R + m\,g\,s - 2\,F\,R)\,\sin\theta \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = k \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = (m\,g\,R + m\,g\,s - 2\,F\,R)\,\cos\theta \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s\,\partial \theta} = m\,g\,\sin\theta \tag{5}$$

troviamo le configurazioni di equilibrio uguagliando a zero le (1) e (2):

$$-m\,g\,\cos\theta + k\,s = 0 \tag{6}$$

$$(m\,g\,R + m\,g\,s - 2\,F\,R)\,\sin\theta = 0 \tag{7}$$

Conviene iniziare dall'equazione (7), già fattorizzata, che fornisce due gruppi di soluzioni.

Primo gruppo:

$$\begin{aligned} &\sin\theta = 0 \\ &-m\,g\,\cos\theta + k\,s = 0 \end{aligned}$$

ovvero

$$\theta = 0, \qquad s = \frac{m\,g}{k} \tag{8}$$

e

$$\theta = \pi, \qquad s = -\frac{m\,g}{k}. \tag{9}$$

Indicando con $Q(\theta, s)$ le configurazioni di equilibrio abbiamo le prime due di esse:

$$Q_1 = \left(0, \frac{m\,g}{k}\right) \tag{10}$$

$$Q_2 = \left(\pi, -\frac{m\,g}{k}\right) \tag{11}$$

Fisicamente, Q_2 andrebbe scartata perchè fornisce $s < 0$; ignoriamo tuttavia questo fatto e forniamo la soluzione completa.

Secondo gruppo:

$$m\,g\,R + m\,g\,s - 2\,F\,R = 0 \tag{12}$$

$$-m\,g\,\cos\theta + k\,s = 0 \tag{13}$$

ovvero

$$\begin{aligned} &s = \frac{m\,g}{k}\,\cos\theta \\ &m\,g\,R + m\,g\,\frac{m\,g}{k}\,\cos\theta - 2\,F\,R = 0 \end{aligned}$$

da cui l'equazione risolutiva

$$\cos\theta = \frac{2\,F - m\,g}{m^2\,g^2}\,k\,R.$$

Otteniamo quindi due configurazioni di equilibrio condizionate,

$$Q_3 = \left(\theta_0, \frac{2\,F - m\,g}{m\,g}\,R\right) \tag{14}$$

$$Q_4 = \left(-\theta_0, \frac{2\,F - m\,g}{m\,g}\,R\right) \tag{15}$$

che esistono solo se

$$\frac{|2\,F - m\,g|}{m^2\,g^2}\,k\,R \leq 1$$

Per lo studio della stabilità scriviamo le matrici hessiane in corrispondenza dei quattro equilibri.

$$H(Q_1) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m\,g\,R + \frac{m^2\,g^2}{k} - 2\,F\,R \end{pmatrix}$$

che è stabile se

$$m\,g\,R + \frac{m^2\,g^2}{k} - 2\,F\,R > 0. \tag{16}$$

$$H(Q_2) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -(m\,g\,R - \frac{m^2\,g^2}{k} - 2\,F\,R) \end{pmatrix}$$

che è stabile se

$$m\,g\,R - \frac{m^2\,g^2}{k} - 2\,F\,R < 0. \tag{17}$$

Le due configurazioni di equilibrio incondizionate Q_1 e Q_2 sono entrambe stabili se

$$2\,F\,R < m\,g\,R + \frac{m^2\,g^2}{k}$$
$$2\,F\,R > m\,g\,R - \frac{m^2\,g^2}{k}$$

ovvero

$$\frac{m\,g}{2} - \frac{m^2\,g^2}{2\,k\,R} < F < \frac{m\,g}{2} + \frac{m^2\,g^2}{2\,k\,R}$$

Le due configurazioni di equilibrio Q_3 e Q_4 sono enrambe instabili, in quanto $\partial^2 V/\partial\theta^2 = 0$ per entrambe (come si vede direttamente dalla (4) assieme alla (12)) e quindi il determinante della matrice hessiana è negativo.

2. (15 punti) Nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura, calcolare la matrice d'inerzia di un contorno esagonale regolare non omogeneo $ABCDEA$ di massa M e lato L. Il lato AB giace sull'asse x ed il punto F apprtiene all'asse y. Il lato AF ha massa tripla degli altri lati. Indicare con m_1 la massa di AF e con m_2 la massa di ciascuno degli altri lati; esprimere gli elementi della matrice d'inerzia dapprima in funzione di m_1 ed m_2, sostituendo solo alla fine le loro espressioni in funzione di M.

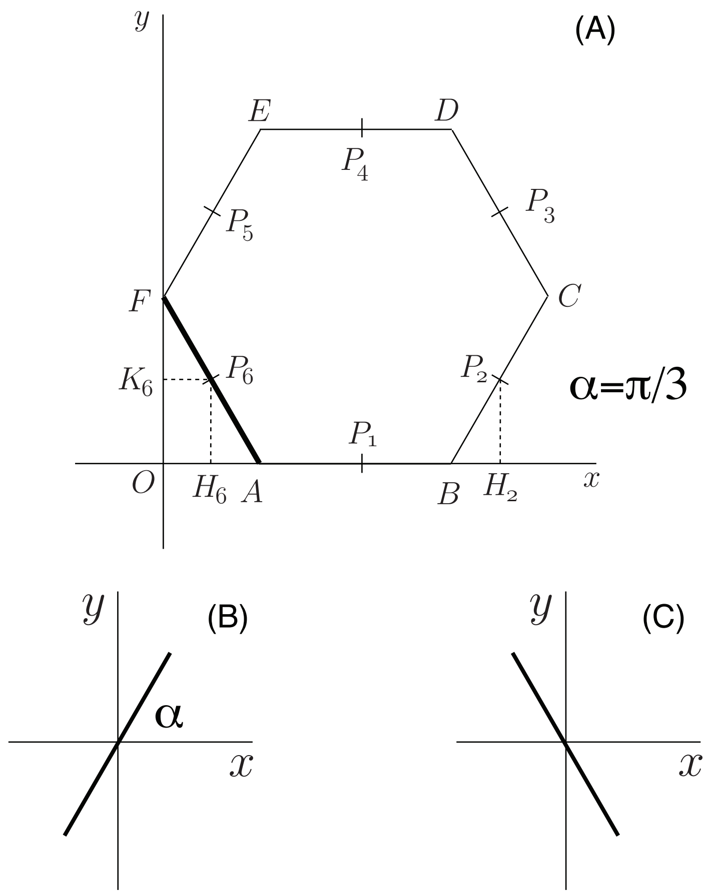


Figura 1: Per la stesura della soluzione la figura è modificata rispetto al testo d'esame.

Svolgimento. Indichiamo con P_1, P_2, ..., P_6 i punti medi dei lati, come in figura (A). Notiamo che $P_2H_2 = P_6H_6 = L\sqrt{3}/4$ e $P_6K_6 = L/4$, $OA = L/2$. Calcoliamo la matrice d'inerzia di un'asta generica di lunghezza L e massa m disposta come in figura (B):

$$I_{11} = \mu \int_{-L/2}^{L/2} y^2\, dl = \mu \int_{-L/2}^{L/2} (l \sin\alpha)^2\, dl = \frac{1}{12}\,\mu\, L^3 \sin^2\alpha = \frac{1}{12}\, mL^2 \sin^2\alpha \tag{18}$$

$$I_{22} = \mu \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, dl = \mu \int_{-L/2}^{L/2} (l \cos\alpha)^2\, dl = \frac{1}{12}\,\mu\, L^3 \cos^2\alpha = \frac{1}{12}\, mL^2 \cos^2\alpha \tag{19}$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{1}{12}\, mL^2 \tag{20}$$

$$I_{12} = -\mu \int_{-L/2}^{L/2} x\, y\, dl = -\mu \int_{-L/2}^{L/2} l^2 \sin\alpha \cos\alpha\, dl = -\frac{1}{12}\, mL^2 \sin\alpha \cos\alpha \tag{21}$$

Se l'asta orientata come in figura (C), I_{11}, I_{22} e I_{33} sono ancora dati dalle stesse espressioni (18), (19) e (20), mentre I_{12} cambia segno.

Con questi risultati, possiamo calcolare gli elementi della matrice d'inerzia delle quattro aste BC, CD, EF e FA con $\alpha = \pi/3$.

Asta BC:

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{1}{12}\, m_2\, L^2\, \frac{3}{4} + m_2 \left(\frac{L}{2}\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\, m_2\, L^2 \\
I_{22} &= \frac{1}{12}\, m_2\, L^2\, \frac{1}{4} + m_2 \left(\frac{7}{4}\, L\right)^2 = \frac{37}{12}\, m_2\, L^2 \\
I_{33} &= \frac{10}{3}\, m_2\, L^2 \\
I_{12} &= -\frac{1}{12}\, m_2\, L^2\, \frac{\sqrt{3}}{4} - m_2\, L^2\, \frac{\sqrt{3}}{4}\, \frac{7}{4} = -\frac{11\sqrt{3}}{24}\, m_2\, L^2
\end{aligned}
$$

Asta CD:

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{1}{12}\, m_2\, L^2\, \frac{3}{4} + m_2 \left(3\, \frac{L}{2}\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}\, m_2\, L^2 \\
I_{22} &= \frac{37}{12}\, m_2\, L^2 \\
I_{33} &= \frac{29}{6}\, m_2\, L^2 \\
I_{12} &= \frac{1}{12}\, m_2\, L^2\, \frac{\sqrt{3}}{4} - m_2\, L^2\, \frac{3\sqrt{3}}{4}\, \frac{7}{4} = -\frac{9\sqrt{3}}{8}\, m_2\, L^2
\end{aligned}
$$

Asta EF:

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= I_{11}(CD) = \frac{7}{4}\, m_2\, L^2 \\
I_{22} &= \frac{1}{12}\, m_2\, L^2\, \frac{1}{4} + m_2 \left(\frac{1}{4}\, L\right)^2 = \frac{1}{12}\, m_2\, L^2 \\
I_{33} &= \frac{11}{6}\, m_2\, L^2 \\
I_{12} &= -\frac{1}{12}\, m_2\, L^2\, \frac{\sqrt{3}}{4} - m_2\, L^2\, \frac{3\sqrt{3}}{4}\, \frac{1}{4} = -\frac{5\sqrt{3}}{24}\, m_2\, L^2
\end{aligned}
$$

Asta FA:

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{1}{4}\, m_1\, L^2 \\
I_{22} &= \frac{1}{12}\, m_1\, L^2\, \frac{1}{4} + m_1 \left(\frac{1}{4}\, L\right)^2 = \frac{1}{12}\, m_1\, L^2 \\
I_{33} &= \frac{1}{3}\, m_1\, L^2 \\
I_{12} &= \frac{1}{12}\, m_1\, L^2\, \frac{\sqrt{3}}{4} - m_1\, L^2\, \frac{\sqrt{3}}{4}\, \frac{7}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{24}\, m_1\, L^2
\end{aligned}
$$

Per le aste AB e ED abbiamo, con $\alpha = 0$:

Asta AB:

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= I_{12} = 0 \\
I_{22} &= I_{33} = \frac{1}{12}\, m_2\, L^2 + m_2\, L^2 = \frac{13}{12}\, m_2\, L^2
\end{aligned}
$$

Asta ED:

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= 0 + m_2\,\left(L\,\sqrt{3}\right)^2 = 3\,m_2\,L^2 \\
I_{22} &= \frac{13}{12}\,m_2\,L^2 \\
I_{33} &= \frac{49}{12}\,m_2\,L^2 \\
I_{12} &= 0 - m_2\,L^2\,\sqrt{3} = -m_2\,L^2\,\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

In conclusione, sommando tutti i contributi, otteniamo per la matrice d'inerzia del sistema:

$$I_{11} = \frac{1}{4}\,m_1\,L^2 + \frac{27}{4}\,m_2\,L^2 \tag{22}$$

$$I_{22} = \frac{1}{12}\,m_1\,L^2 + \frac{101}{12}\,m_2\,L^2 \tag{23}$$

$$I_{33} = \frac{1}{3}\,m_1\,L^2 + \frac{91}{6}\,m_2\,L^2 \tag{24}$$

$$I_{12} = -\frac{\sqrt{3}}{24}\,m_1\,L^2 - \frac{67\,\sqrt{3}}{24}\,m_2\,L^2 \tag{25}$$

Ora esprimiamo il tutto in termini della massa M dell'intero sistema. Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
m_1 + 5\,m_2 &= M \\
m_1 &= 3\,m_2
\end{aligned}
$$

ovvero

$$m_2 = \frac{1}{8}\,M \qquad m_1 = \frac{3}{8}\,M$$

Le (22)-(25) diventano allora:

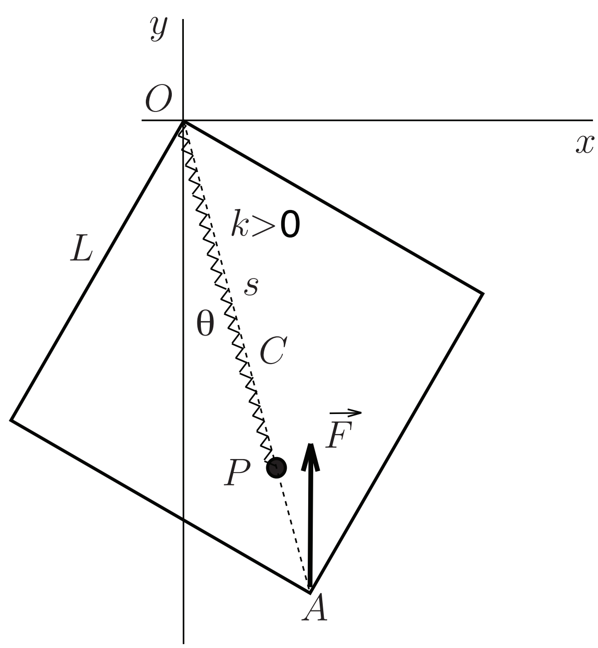
$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{15}{16}\,M\,L^2 \\
I_{22} &= \frac{13}{12}\,M\,L^2 \\
I_{33} &= \frac{97}{48}\,M\,L^2 \\
I_{12} &= -\frac{35\,\sqrt{3}}{96}\,M\,L^2
\end{aligned}
$$

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Appello del 13/4/2019

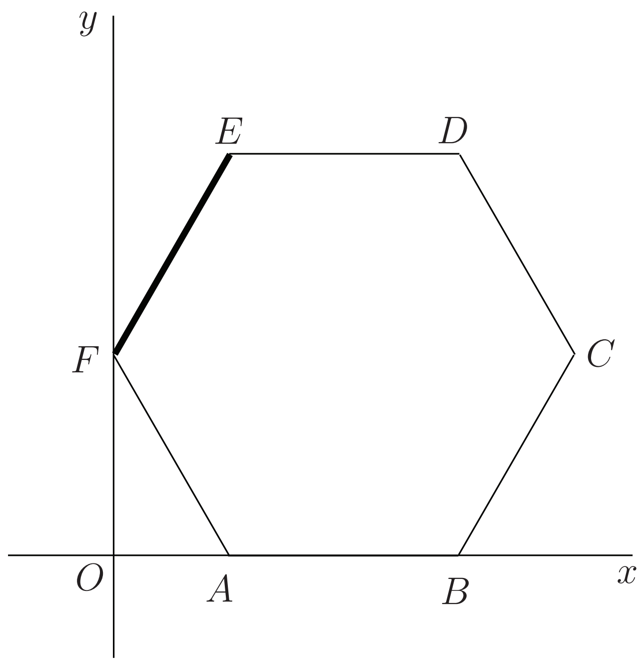
Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 13 aprile 2019

1. Un contorno quadrato di centro C, lato L e massa M si muove nel piano verticale $O(x, y)$ (con y verticale ascendente), libero di ruotare attorno al suo vertice O che è fisso. Sulla diagonale OA (priva di massa) scorre senza attrito una pallina P di massa m, collegata al punto O da una molla di costante $k > 0$. Una forza costante $\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{j}}$ agisce inoltre sul punto A. Utilizzando le coordinate lagrangiane s (ascissa di P lungo la diagonale) e θ (angolo della diagonale con la verticale) indicate in figura, determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità per valori generici dei parametri; determinare quindi un intervallo per F nel quale le configurazioni di equilibrio incondizionate sono stabili.



2. (15 punti) Nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura, calcolare la matrice d'inerzia di un contorno esagonale regolare non omogeneo $ABCDEA$ di massa M e lato L. Il lato AB giace sull'asse x ed il punto F apprtiene all'asse y. Il lato EF ha massa doppia degli altri lati. Indicare con m_1 la massa di EF e con m_2 la massa di ciascuno degli altri lati; esprimere gli elementi della matrice d'inerzia dapprima in funzione di m_1 ed m_2, sostituendo solo alla fine le loro espressioni in funzione di M.

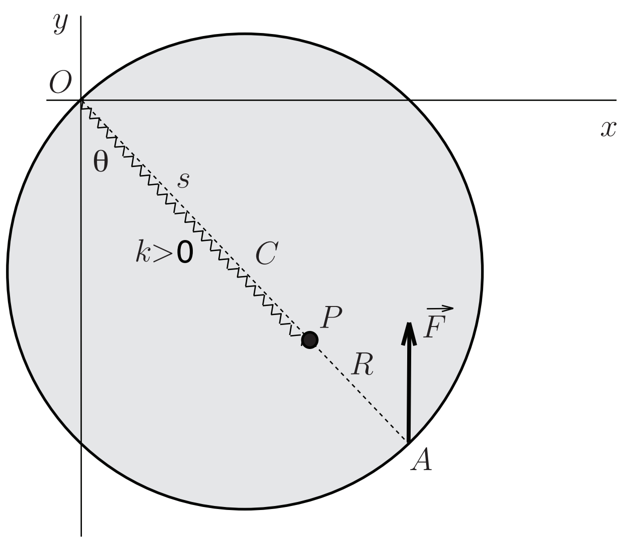


Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

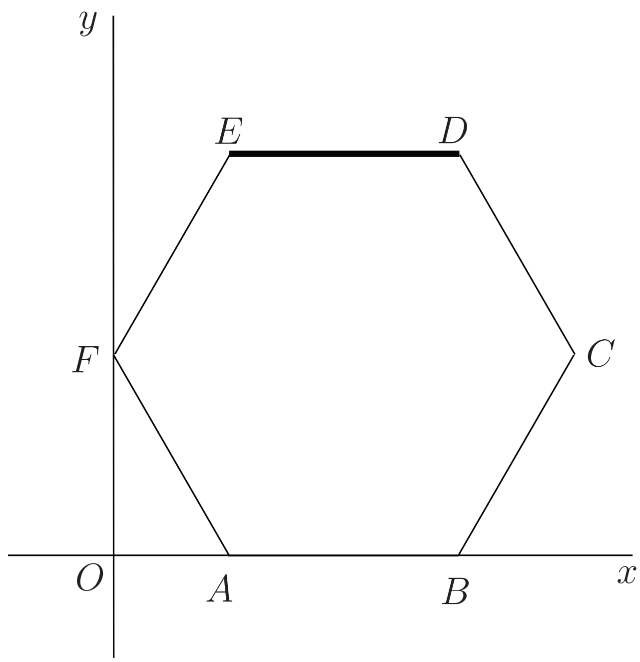
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Appello del 13/4/2019

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 13 aprile 2019

1. Un disco di centro C, raggio R e massa M si muove nel piano verticale $O(x, y)$ (con y verticale ascendente), libero di ruotare attorno ad un suo punto del bordo O che è fisso. Sul diametro OA è praticata una scanalatura dove scorre senza attrito una pallina P di massa m, collegata al punto O da una molla di costante $k > 0$. Una forza costante $\mathbf{F} = F\widehat{\mathbf{j}}$ agisce inoltre sul punto A. Utilizzando le coordinate lagrangiane s (ascissa di P lungo il diametro OA) e θ (angolo del diametro con la verticale) indicate in figura, determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità per valori generici dei parametri; determinare quindi un intervallo per F nel quale le configurazioni di equilibrio incondizionate sono stabili.



2. (15 punti) Nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura, calcolare la matrice d'inerzia di un contorno esagonale regolare non omogeneo $ABCDEA$ di massa M e lato L. Il lato AB giace sull'asse x ed il punto F apprtiene all'asse y. Il lato ED ha massa quintupla degli altri lati. Indicare con m_1 la massa di ED e con m_2 la massa di ciascuno degli altri lati; esprimere gli elementi della matrice d'inerzia dapprima in funzione di m_1 ed m_2, sostituendo solo alla fine le loro espressioni in funzione di M.

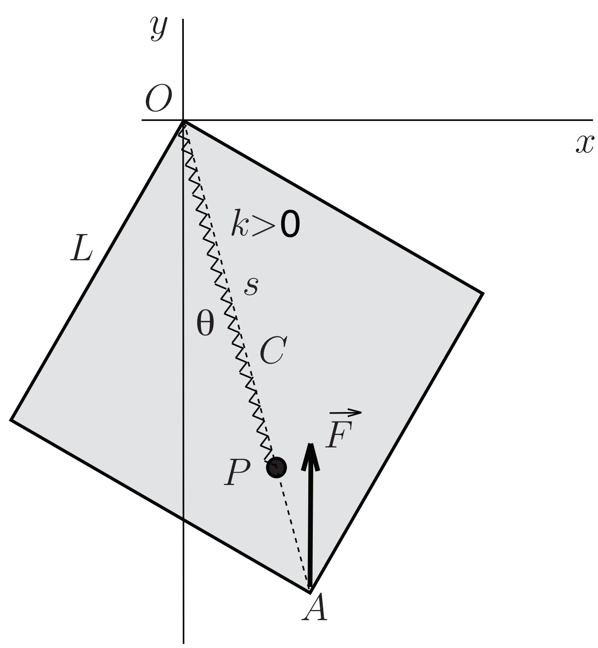


Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

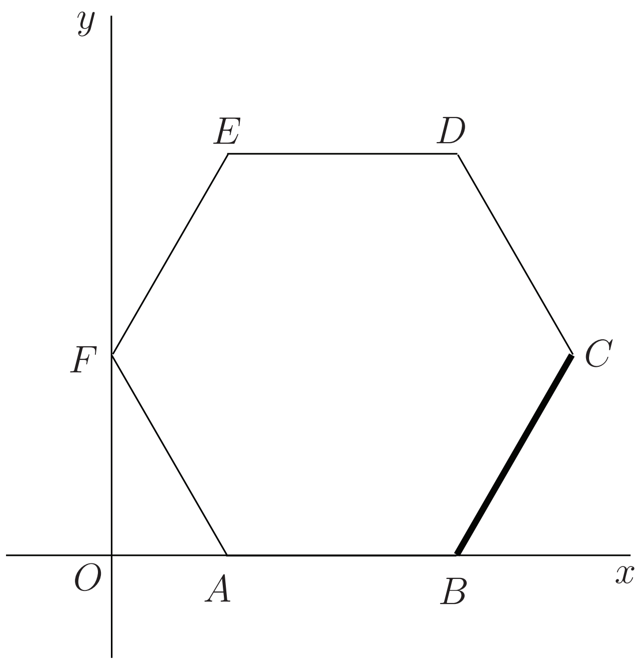
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Appello del 13/4/2019

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 13 aprile 2019

1. Una lamina quadrata di centro C, lato L e massa M si muove nel piano verticale $O(x, y)$ (con y verticale ascendente), libera di ruotare attorno al suo vertice O che è fisso. Sulla diagonale OA è praticata una scanalatura dove scorre senza attrito una pallina P di massa m, collegata al punto O da una molla di costante $k > 0$. Una forza costante $\mathbf{F} = F\widehat{\mathbf{j}}$ agisce inoltre sul punto A. Utilizzando le coordinate lagrangiane s (ascissa di P lungo la diagonale) e θ (angolo della diagonale con la verticale) indicate in figura, determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità per valori generici dei parametri; determinare quindi un intervallo per F nel quale le configurazioni di equilibrio incondizionate sono stabili.



2. (15 punti) Nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura, calcolare la matrice d'inerzia di un contorno esagonale regolare non omogeneo $ABCDEA$ di massa M e lato L. Il lato AB giace sull'asse x ed il punto F apprtiene all'asse y. Il lato BC ha massa sestupla degli altri lati. Indicare con m_1 la massa di BC e con m_2 la massa di ciascuno degli altri lati; esprimere gli elementi della matrice d'inerzia dapprima in funzione di m_1 ed m_2, sostituendo solo alla fine le loro espressioni in funzione di M.



Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.