Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2018/2019
Meccanica Razionale - Appello del 7/2/2019

Metto in rete le soluzioni di alcuni degli esercizi: una versione del secondo esercizio e due del primo. Le soluzioni degli altri problemi si ottengono con la stessa impostazione "mutatis mutandis".

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Appello del 8/1/2019

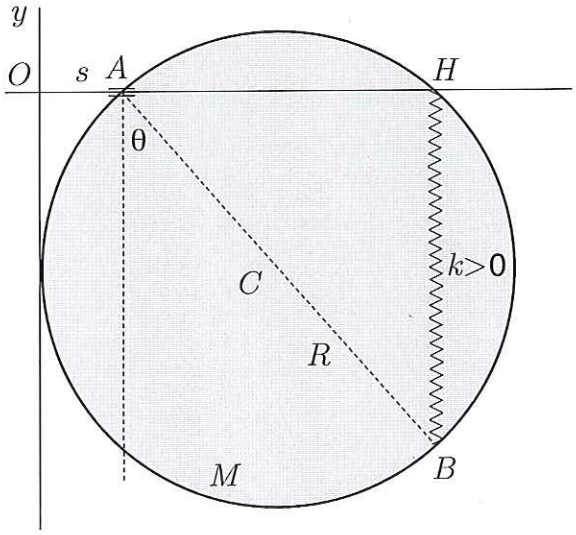
Nome ....

N. Matricola ....

Ancona, 7 febbraio 2019

1. Un cerchio di centro C, raggio R e massa M si muove nel piano verticale $O(x, y)$ ed è sospeso al punto A del suo bordo che può a sua volta scorrere senza attrito sull'asse x. Il punto B diametralmente opposto ad A è collegato alla sua proiezione H sull'asse x da una molla di costante elastica $k > 0$. Sul punto B agisce inoltre una forza viscosa di costante $\lambda > 0$. Scegliendo le coordinate lagrangiane s e θ mostrate in figura (s è l'ascissa di A e θ è l'angolo che $B - A$ forma con l'asse y), si chiede di

   - (5 punti) scrivere l'energia potenziale del sistema;
   - (6 punti) scrivere l'energia cinetica del sistema;
   - (5 punti) scrivere le equazioni di Lagrange;



La forza viscosa su B non è conservativa!

$$V = -MgR\cos\theta + \frac{1}{2}k(2R\cos\theta)^2$$

$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I(C)\dot{\theta}^2 \qquad I(C) = \frac{1}{2}MR^2$$

$$C - O = (s + R\,\mathrm{sen}\,\theta)\hat{\imath} - R\cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_c = (\dot{s} + R\dot{\theta}\cos\theta)\hat{\imath} + R\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}$$

$$T = \frac{1}{2}M\left\{\dot{s}^2 + 2R\dot{s}\dot{\theta}\cos\vartheta + R^2\dot{\theta}^2\right\} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}M\left\{\dot{s}^2 + 2R\dot{s}\dot{\theta}\cos\vartheta + \frac{3}{2}R^2\dot{\theta}^2\right\}$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = M\dot{s} + MR\dot{\theta}\cos\vartheta = M\left(\dot{s} + R\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2}MR^2\dot{\vartheta} + MR\dot{s}\cos\vartheta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -MR\dot{s}\dot{\theta}\sin\theta - MgR\sin\vartheta + 2kR^2\cos\theta\sin\vartheta$$

$$B - O = (s + 2R\sin\vartheta)\hat{\imath} - 2R\cos\vartheta\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}(B) = (\dot{s} + 2R\dot{\theta}\cos\theta)\hat{\imath} + 2R\dot{\theta}\sin\vartheta\,\hat{\jmath}$$

$$\frac{\partial B}{\partial s} = \hat{\imath} \qquad \frac{\partial B}{\partial \vartheta} = 2R\left(\hat{\imath}\cos\vartheta + \hat{\jmath}\sin\theta\right)$$

$$Q_s = \vec{F}_\lambda \cdot \frac{\partial B}{\partial s} = -\lambda\vec{v}(B)\cdot\frac{\partial B}{\partial s} = -\lambda\left(\dot{s} + 2R\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

$$Q_\theta = \vec{F}_\lambda \cdot \frac{\partial B}{\partial \theta} = -\lambda\vec{v}(B)\cdot\frac{\partial B}{\partial \theta} = -\lambda\cdot 2R\cdot\left[(\dot{s} + 2R\dot{\theta}\cos\theta)\cos\vartheta + 2R\dot{\theta}\sin^2\theta\right]$$

$$= -2\lambda R\left(\dot{s}\cos\vartheta + 2R\dot{\theta}\right)$$

<u>Eq. di Lagrange:</u>

$$\begin{cases} M\left(\ddot{s} + R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta\right) = -\lambda\left(\dot{s} + 2R\dot{\theta}\cos\theta\right) \\ MR\left\{\frac{3}{2}R\ddot{\theta} + \ddot{s}\cos\vartheta - \cancel{\dot{s}\dot{\theta}\sin\theta}\right\} + \cancel{MR\dot{s}\dot{\theta}\sin\theta} + MgR\sin\vartheta - 2kR^2\cos\theta\sin\vartheta = \\ \qquad = -2\lambda R\left(\dot{s}\cos\vartheta + 2R\dot{\theta}\right) \end{cases}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Appello del 8/1/2019

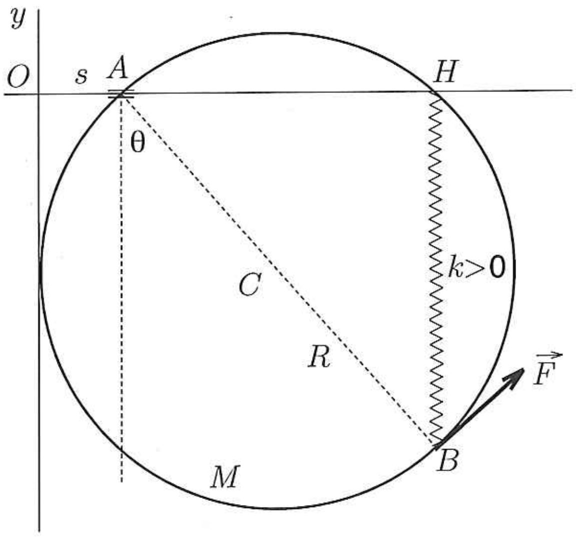
Nome ....

N. Matricola ....

Ancona, 7 febbraio 2019

1. Una circonferenza di centro C, raggio R e massa M si muove nel piano verticale $O(x, y)$ ed è sospesa al punto A del suo bordo che può a sua volta scorrere senza attrito sull'asse x. Il punto B diametralmente opposto ad A è collegato alla sua proiezione H sull'asse x da una molla di costante elastica $k > 0$. Sul punto B agisce inoltre una forza $\mathbf{F}$ di modulo costante e tangente alla circonferenza (vedi figura). Scegliendo le coordinate lagrangiane s e θ mostrate in figura (s è l'ascissa di A e θ è l'angolo che $B - A$ forma con l'asse y), si chiede di

   - (5 punti) scrivere l'energia potenziale del sistema;
   - (6 punti) scrivere l'energia cinetica del sistema;
   - (5 punti) scrivere le equazioni di Lagrange;



$\vec{F}$ non è conservativa!

$$V = -MgR\cos\vartheta + \frac{1}{2}k\left(2R\cos\vartheta\right)^2$$

$$C - O = (s + R\sin\vartheta)\,\hat{\imath} - R\cos\vartheta\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_c = (\dot{s} + R\dot{\vartheta}\cos\vartheta)\,\hat{\imath} + R\dot{\vartheta}\sin\vartheta\,\hat{\jmath}$$

$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I(c)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left\{\dot{s}^2 + 2R\dot{s}\dot{\theta}\cos\vartheta + R^2\dot{\vartheta}^2\right\} + \frac{1}{2}(MR^2)\dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}M\left\{\dot{s}^2 + 2R\dot{s}\dot{\theta}\cos\vartheta + 2R^2\dot{\theta}^2\right\}$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = M(\dot{s} + R\dot{\theta}\cos\theta) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = M\left\{R\dot{s}\cos\theta + 2R^2\dot{\theta}\right\}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -MR\dot{s}\dot{\theta}\sin\theta - MgR\sin\theta + 2kR^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\vec{F} = F(\hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\operatorname{sen}\theta)$$

$$B - O = (s + 2R\operatorname{sen}\theta)\hat{\imath} - 2R\cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\frac{\partial B}{\partial s} = \hat{\imath} \qquad \frac{\partial B}{\partial \theta} = 2R(\hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\operatorname{sen}\theta)$$

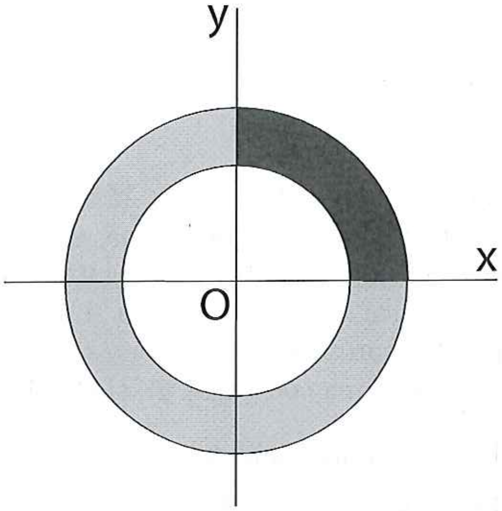
$$Q_s = \vec{F} \cdot \frac{\partial B}{\partial s} = F\cos\theta$$

$$Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial B}{\partial \theta} = 2RF$$

<u>Eq. di Lagrange:</u>

$$\begin{cases} M(\ddot{s} + R\ddot{\theta} - R\dot{\theta}^2\sin\theta) = F\cos\theta \\ MR(\ddot{s}\cos\theta - \cancel{\dot{s}\dot{\theta}\sin\theta} + 2R\ddot{\theta}) + \cancel{MR\dot{s}\dot{\theta}\sin\theta} + MgR\sin\theta - 2kR^2\sin\theta\cos\theta = \\ \qquad = 2RF \end{cases}$$

2. (15 punti) Nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura, calcolare la matrice d'inerzia di una corona circolare non omogenea di massa M e raggi $r < R$. Il quarto di corona nel I quadrante ha massa doppia del resto della corona. Determinare quindi per via geometrica la terna principale d'inerzia con origine in O.



Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

Dalle simmetrie si vede che $I_{11} = I_{22}$ (perché sono uguali per ciascun quarto di corona). Siano ora

m_1 = massa dei 3/4 di corona da $\pi/2$ a 2π

m_2 = " di 1/4 " 0 a $\pi/2$

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = M \\ m_2 = 2 m_1 \end{cases} \qquad m_1 = \frac{1}{3} M \,;\; m_2 = \frac{2}{3} M$$

Per $\frac{1}{4}$ di corona con σ ed m generici

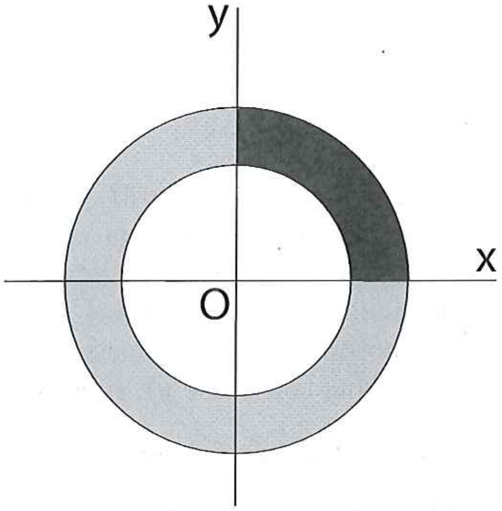
$$I_{11} = I_{22} = \sigma \left\{ \int_0^R \int_0^{\pi/2} \rho^2 \operatorname{sen}^2\vartheta \, \rho \, d\rho \, d\vartheta - \int_0^r \int_0^{\pi/2} \rho^2 \operatorname{sen}^2\vartheta \, \rho \, d\rho \, d\vartheta \right\} =$$

$$= \sigma \left\{ \frac{\pi}{4} \frac{R^4 - r^4}{4} \right\} = \frac{1}{16} \sigma \pi (R^2 - r^2)(R^2 + r^2) = \frac{1}{4} \left[\sigma \frac{\pi (R^2 - r^2)}{4} \right] (R^2 + r^2) =$$

$$= \frac{1}{4} m (R^2 + r^2)$$

Dunque, $I_{11}(\text{corona}) = \frac{1}{4} m_2 (R^2 + r^2) + \frac{1}{4} \left(\frac{m_1}{3} \cdot 3 \right) (R^2 + r^2) = \frac{1}{4} M (R^2 + r^2) = I_{22}$

2. (15 punti) Nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura, calcolare la matrice d'inerzia di una corona circolare non omogenea di massa M e raggi $r < R$. Il quarto di corona nel I quadrante ha massa doppia del resto della corona. Determinare quindi per via geometrica la terna principale d'inerzia con origine in O.



Non si possono usare le formule notevoli dei momenti d'inerzia.

<u>Oppure</u>

$$I_{11}(\text{Corona}) = \sigma_2 \int_0^{\pi/2} \int_r^R \rho^2 \sin^2\vartheta \, \rho \, d\rho \, d\vartheta + \sigma_1 \int_{\pi/2}^{\frac{3}{2}\pi} \int_r^{R} (\dots) =$$

$$= \sigma_2 \frac{\pi}{4} \frac{R^4 - r^4}{4} + \sigma_1 \frac{3}{4}\pi \frac{R^4 - r^4}{4} = \frac{1}{4}\pi (R^2 - r^2)(R^2 + r^2)(\sigma_1 + 3\sigma_2) =$$

$$= \frac{1}{4}(m_1 + m_2)(R^2 + r^2) = \frac{1}{4} M (R^2 + r^2) = I_{22}$$

$$I_{12}(\text{Corona}) = I_{12}(\text{I quadrante}) + \underbrace{I_{12}(\text{II}) + I_{12}(\text{III})}_{=0 \text{ per simmetria materiale}} + I_{12}(\text{IV}) =$$

$$= -\sigma_2 \int_0^{\pi/2} \int_r^R \rho^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \, \rho \, d\rho \, d\vartheta - \sigma_1 \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \int_r^R \rho^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \, \rho \, d\rho \, d\vartheta =$$

$$= -\frac{R^4 - r^4}{4} \left\{ \sigma_2 \left[\frac{\sin^2\vartheta}{2} \right]_0^{\pi/2} + \sigma_1 \left[\frac{\sin^2\vartheta}{2} \right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \right\} = -\frac{R^4 - r^4}{4} \left(\frac{1}{2}\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_1 \right) =$$

$$= -\frac{(R^2 + r^2)}{8} \frac{\pi (R^2 - r^2)}{\pi} (\sigma_2 - \sigma_1) = \frac{R^2 + r^2}{8\pi} \left(\frac{4}{3} m_1 - 4 m_2 \right) = \frac{R^2 + r^2}{2\pi} \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3} \right) M =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} M (R^2 + r^2)$$