

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Prova teorica del 5/4/2018

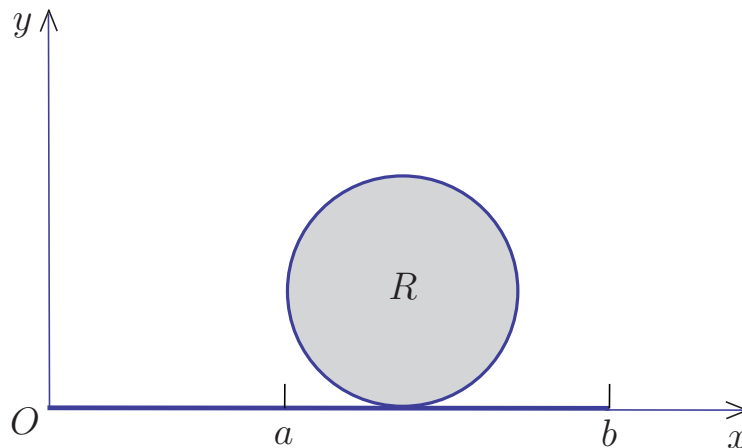
Prova teorica - A

Nome

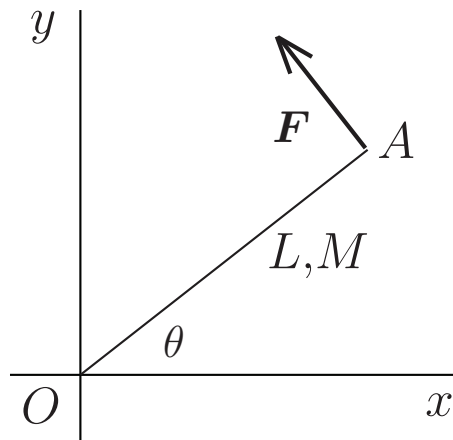
N. Matricola

Ancona, 5 aprile 2018

1.
 - Gradi di libertà di un corpo rigido non altrimenti vincolato nello spazio.
 - Un disco di raggio R rotola lungo una guida nel piano $O(x, y)$, con l'asse x lungo la guida. Nel tratto $0 \leq x \leq a$ il disco rotola senza strisciare, nel tratto $a \leq x \leq b$ il disco rotola e striscia, quando il punto di contatto raggiunge l'ascissa $x = b$ il disco esce dalla guida. Si descriva il numero di gradi di libertà del disco nelle varie fasi del moto.



- 2.
- Enunciare e dimostrare le equazioni cardinali della dinamica.
 - Un'asta OA di lunghezza L e massa M si muove sul piano orizzontale $O(x, y)$. Sull'asta agisce una forza \mathbf{F} di modulo costante e direzione perpendicolare all'asta, applicata all'estremo A . Se l'asta parte da ferma disposta lungo il semiasse x positivo, dopo quanto tempo si ritrova nella posizione di partenza? Quanto vale la sua energia cinetica dopo un giro completo? Rispondere alla seconda domanda sia usando la soluzione delle equazioni del moto sia usando il teorema delle forze vive.



Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Prova teorica del 5/4/2018

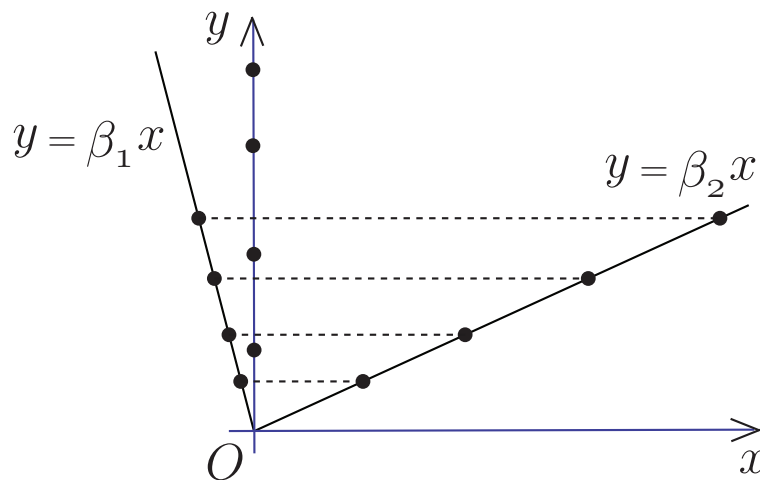
Prova teorica - B

Nome

N. Matricola

Ancona, 5 aprile 2018

- Enunciare e dimostrare il Teorema di Huygens per la matrice d'inerzia completa. Da questo, ricavare il teorema degli assi paralleli.
 - Un sistema rigido piano è costituito da N punti materiali P_1, P_2, \dots, P_N appartenenti al piano $O(x, y)$. Di questi, i punti $P_1, P_2, \dots, P_k, k < N/2$, hanno ugual massa m_1 e sono situati sulla retta $y = \beta_1 x$, con $\beta_1 < 0$ e $x < 0$. A ciascuno di essi corrisponde un punto situato sulla retta $y = \beta_2 x$ con $\beta_2 > 0$ e $x > 0$, posto alla stessa quota y e di massa m_2 . I restanti punti sono situati sull'asse y . Determinare la relazione cui devono obbedire m_1, m_2, β_1 e β_2 affinché la terna $O(x, y, z)$ sia principale d'inerzia. Dimostrare inoltre che, in ottemperanza della relazione trovata, il centro di massa del sistema giace sull'asse y .



- 2.
- Enunciare e dimostrare il teorema di Mozzi.
 - Individuare l'asse di Mozzi per il campo di velocità $\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(O') + \boldsymbol{\omega} \times (P - O')$ con

$$\mathbf{v}(O') = v \frac{\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{2}} \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{k}},$$

v ed ω costanti, supponendo che all'istante $t = 0$ si abbia $O' \equiv O$.

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Prova teorica del 5/4/2018

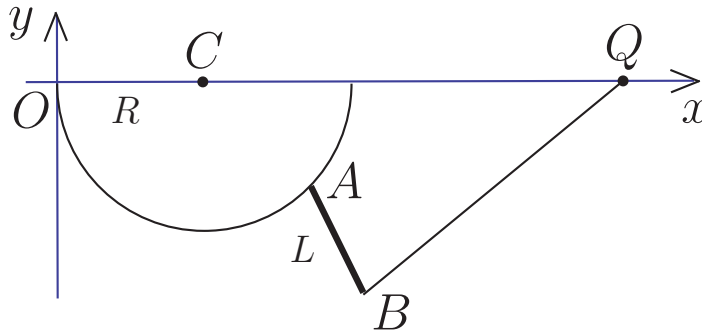
Prova teorica - C

Nome

N. Matricola

Ancona, 5 aprile 2018

- Trattare in modo esauriente i moti rigidi piani, dimostrando tutte le affermazioni.
 - Nel piano $O(x, y)$, Individuare per via geometrica il centro istantaneo di rotazione di un'asta AB di lunghezza L , il cui estremo B è sospeso mediante una sbarretta priva di massa ad un punto Q dell'asse x e l'estremo A scorre su una semicirconferenza di raggio R e centro il punto $C(R, 0)$.



- 2.
- Enunciare e dimostrare le formule di Poisson e ricavare la formula fondamentale dei moti rigidi. Partendo da questa, dire quando un moto si dice traslatorio, quando rotatorio e quando rototraslatorio.
 - Determinare il vettore $\boldsymbol{\omega}$ per cui:

$$\dot{\hat{\mathbf{i}}} = -2(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$$

$$\dot{\hat{\mathbf{j}}} = \hat{\mathbf{k}} + 2\hat{\mathbf{i}}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{k}}} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica - V. O.
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Prova teorica del 5/4/2018

Prova teorica - D

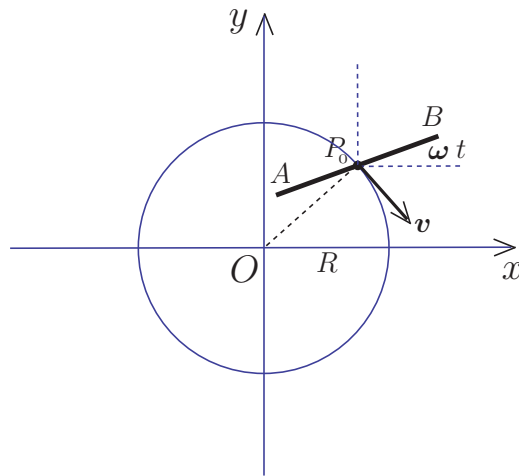
Nome

N. Matricola

Ancona, 5 aprile 2018

1.
 - Enunciare e dimostrare le equazioni di Lagrange per i sistemi non conservativi.
 - Un punto P si muove sulla circonferenza di centro l'origine e raggio R nel piano orizzontale $O(x, y)$; sia θ l'angolo formato dal vettore posizione $P-O$ con l'asse x . Sul punto agisce una forza di attrito viscoso $\mathbf{F}_\lambda = -\lambda \mathbf{v}$. Determinare le forze generalizzate di Lagrange in funzione della coordinata lagrangiana θ e della velocità generalizzata $\dot{\theta}$.

- 2.
- Partendo dalle definizioni elementari, esprimere il momento angolare di un corpo rigido con un punto fisso O' introducendo così la matrice d'inerzia ed individuare le proprietà generali della matrice d'inerzia. Estendere quindi l'espressione del momento angolare al caso in cui il polo sia mobile con velocità data $\mathbf{v}(O')$.
 - Un'asta di massa M e lunghezza L si muove nel piano $O(x, y)$ con il punto medio P_0 vincolato a scorrere in senso orario con velocità scalare costante v sulla circonferenza di raggio R e centro l'origine. L'asta inoltre ruota attorno a P_0 in senso antiorario con velocità angolare ω . Quanto deve valere ω affinché il momento angolare dell'asta rispetto all'origine O sia nullo?



Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Prova teorica del 5/4/2018

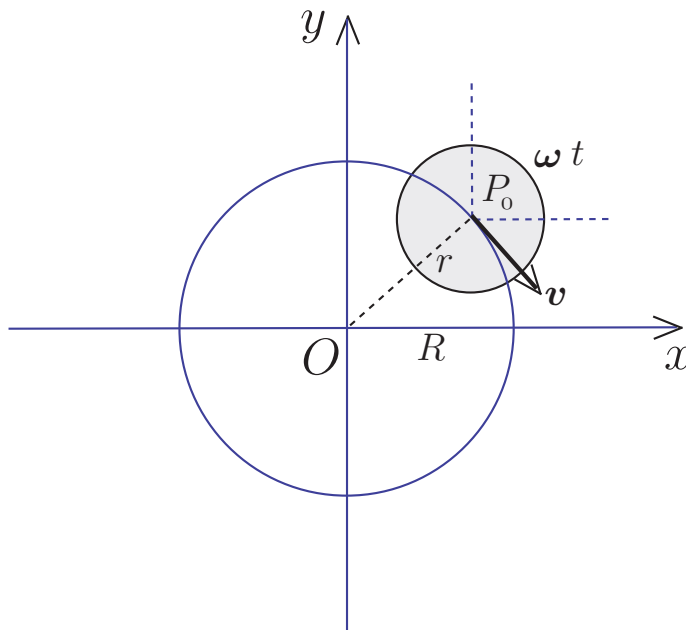
Prova teorica - E

Nome

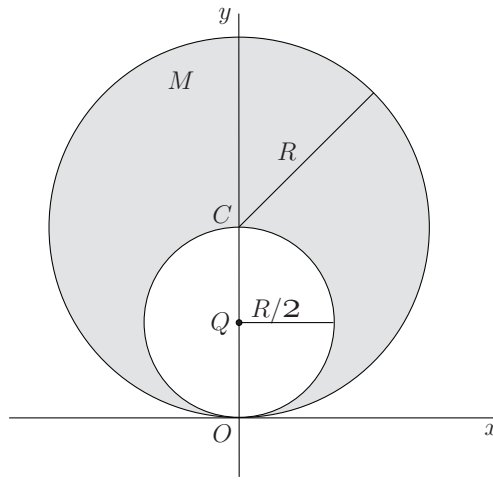
N. Matricola

Ancona, 5 aprile 2018

1.
 - Enunciare e dimostrare il teorema di König per l'energia cinetica.
 - Un disco di raggio r e massa m si muove nel piano $O(x, y)$ con il centro P_0 vincolato a scorrere in senso orario con velocità scalare costante v sulla circonferenza di raggio $R > r$ e centro l'origine. Il disco inoltre ruota attorno a P_0 in senso antiorario con velocità angolare ω . Scrivere l'energia cinetica del disco.



- 2.
- Proprietà additiva della massa per le matrici d'inerzia.
 - Una figura piana omogenea forata di massa M è costituita da un cerchio di raggio R privato di un cerchio tangente internamente e raggio $R/2$ (vedi figura). Determinare la matrice d'inerzia in una terna solidale con l'origine nel punto di tangenza dei due cerchi, l'asse x tangente ai bordi dei due cerchi, l'asse y nel piano e l'asse z ortogonale al piano della figura. Eseguire un solo integrale multiplo, ricavando i dati rimanenti dalle proprietà di simmetria e usando il teorema di Huygens.



Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Prova teorica del 5/4/2018

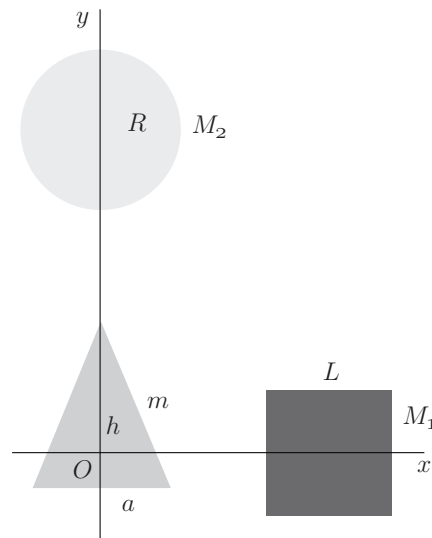
Prova teorica - F

Nome

N. Matricola

Ancona, 5 aprile 2018

- Introdurre la nozione di simmetria materiale ed illustrare la sua relazione con i centri di massa e gli assi principali d'inerzia; dimostrare tutte le affermazioni.
 - Un sistema rigido piano, appartenente al piano $O(x, y)$ indicato in figura, è costituito da un quadrato di lato L e massa M_1 , un triangolo isoscele di altezza h , base $2a$ e massa m e da un cerchio di raggio R e massa M_2 disposti come in figura (il centro del cerchio e il centro di massa del triangolo sull'asse y , la base del triangolo parallela all'asse x , i lati del quadrato paralleli agli assi coordinati e il suo centro sull'asse x). Determinare, sulla base delle simmetrie materiali, la terna principale d'inerzia nel sistema di riferimento indicato.



2.
 - Proprietà distributiva del centro di massa.
 - Determinare il centro di massa del sistema rigido del punto precedente, supponendo che il vertice superiore del triangolo abbia ordinata $2h/3$, il centro del cerchio abbia ordinata p e il centro del quadrato abbia ascissa q .