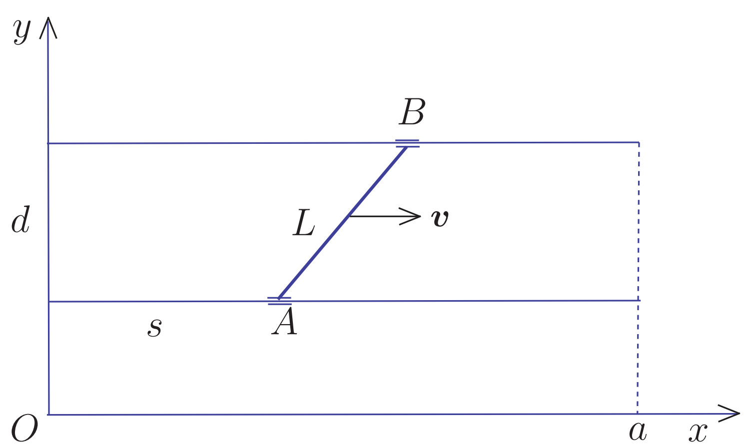
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Prova teorica del 10/2/2018

Prova teorica - A

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 10 febbraio 2018

1. Un'asta AB di lunghezza L si muove in un piano orizzontale. L'asta è libera di ruotare attorno ad entrambi gli estremi A e B, che peraltro scorrono su due guide parallele di lunghezza finita, $a > L$ e poste a distanza $d < L$ (vedi figura). Sia $s(t)$ l'ascissa di A. Se si suppone che l'asta scorra verso destra con velocità costante nota v, partendo da $s = 0$, e senza mai interrompere il suo moto, si descriva il numero di gradi di libertà dell'asta nelle varie fasi del moto in funzione di t, fino a quando l'asta sarà completamente uscita dalle guide.



Svolgimento. Fino a quando gli estremi A e B rimangono sulle guide l'asta possiede zero gradi di libertà, perchè il suo moto è completamente noto. Da quando si libera solo l'estremo B l'asta possiede un grado di libertà (rotazione attorno ad A); da quando anche A si libera il numero di gradi di libertà è pari a tre.

2. Individuare l'asse di Mozzi per il campo di velocità $\boldsymbol{v}(P) = \boldsymbol{v}(O') + \boldsymbol{\omega} \times (P - O')$ con

$$\boldsymbol{v}(O') = \frac{v}{\sqrt{2}}\,(\widehat{\mathbf{i}} + \widehat{\mathbf{j}}) \qquad \boldsymbol{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\,(\widehat{\mathbf{j}} - \widehat{\mathbf{i}}),$$

v ed ω costanti.

Svolgimento. Abbiamo $\boldsymbol{v}(O') \perp \boldsymbol{\omega}$ con $\boldsymbol{\omega}$ lungo la bisettrice del II e IV quadrante; l'asse di Mozzi è pertanto una retta parallela a tale bisettrice e passante per il punto O'' del teorema di Mozzi. Per determinare O'' dobbiamo risolvere $\boldsymbol{v}(O') = \boldsymbol{\omega} \times (O' - O'')$. Ponendo $O' - O'' = x''\,\widehat{\mathbf{i}} + y''\,\widehat{\mathbf{j}} + z''\,\widehat{\mathbf{k}}$ abbiamo

$$\frac{v}{\sqrt{2}}\,(\widehat{\mathbf{i}} + \widehat{\mathbf{j}}) = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\,(\widehat{\mathbf{j}} - \widehat{\mathbf{i}}) \times (x''\,\widehat{\mathbf{i}} + y''\,\widehat{\mathbf{j}} + z''\,\widehat{\mathbf{k}}) = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\,\left[z''(\widehat{\mathbf{i}} + \widehat{\mathbf{j}}) - (x'' + y'')\,\widehat{\mathbf{k}}\right]$$

da cui $x'' + y'' = 0$, $z'' = v/\omega$ e

$$O'' - O' = t\,(\widehat{\mathbf{i}} - \widehat{\mathbf{j}}) + \frac{v}{\omega}\,\widehat{\mathbf{k}}, \quad -\infty < t < +\infty$$

L'asse di Mozzi è quindi una retta parallela alla bisettrice del II e IV quadrante situata alla quota $z'' = v/\omega$.

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Prova teorica del 10/2/2018

Prova teorica - B

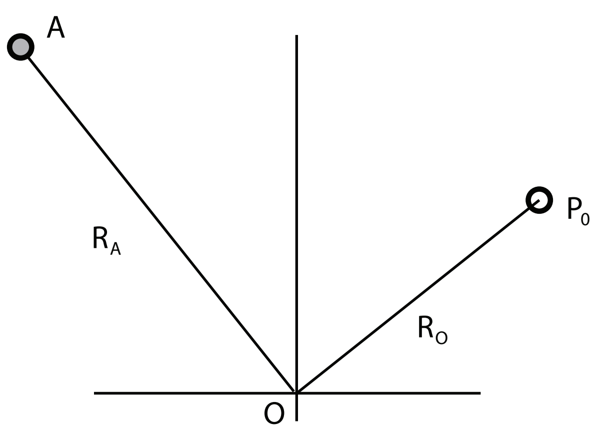
Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 10 febbraio 2018

1. Dimostrare che per un sistema rigido di N punti materiali P_1, P_2, ..., P_N di masse m_1, m_2, ..., m_N vale la relazione

$$\mathbf{I}(O) = \mathbf{I}(A) + M\left[\boldsymbol{R}_A^2\,\mathbf{1} - \boldsymbol{R}_A\,\boldsymbol{R}_A - \boldsymbol{R}_0\,\boldsymbol{R}_A - \boldsymbol{R}_A\,\boldsymbol{R}_0\right]$$

dove O è l'origine di un sistema solidale, P_0 è il centro di massa, A un punto tale che la retta passante per A e per O è perpendicolare alla retta passante per P_0 ed O ed M la massa totale del sistema. Inoltre, $\boldsymbol{R}_A$ e $\boldsymbol{R}_0$ sono i vettori posizione del punto A e di P_0.

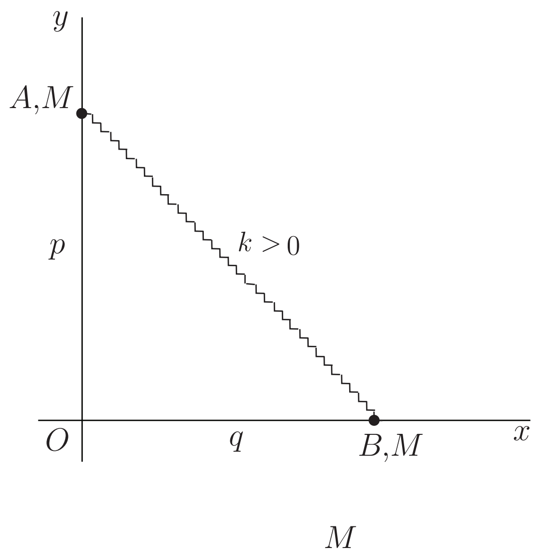


Svolgimento. Ricalcando la dimostrazione del teorema di Huygens:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}(O) &= \sum_i m_i \left[|P_i - O|^2 \, \mathbf{1} - (P_i - O)\,(P_i - O) \right] \\
&= \sum_i m_i \left[|P_i - A + A - O|^2 \, \mathbf{1} - (P_i - A + A - O)\,(P_i - A + A - O) \right] = \\
&= \sum_i m_i \left\{ \left[|P_i - A|^2 + |A - O|^2 + 2\,(P_i - A)\cdot(A - O) \right] \mathbf{1} - \right. \\
&\quad \left. -(P_i - A + A - O)\,(P_i - A + A - O) \right\} = \\
&= \sum_i m_i \, \left[|P_i - A|^2 \, \mathbf{1} - (P_i - A)\,(P_i - A) \right] + M \, \left[|A - O|^2 \, \mathbf{1} - (A - O)\,(A - O) \right] - \\
&\quad - \sum_i m_i \, \left[(P_i - A)\,(A - O) + (A - O)\,(P_i - A) \right] = \\
&= \mathbf{I}(A) + M \left[\boldsymbol{R}_A^2 \, \mathbf{1} - \boldsymbol{R}_A \, \boldsymbol{R}_A \right] - \left[\boldsymbol{R}_0 \, \boldsymbol{R}_A - \boldsymbol{R}_A \, \boldsymbol{R}_0 \right]
\end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto che $P_0 - O$ e $A - O$ sono ortogonali.

2. Due punti materiali A e B di ugual massa M si muovono rispettivamente lungo l'asse y e lungo l'asse x di un piano orizzontale, collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ (vedi figura). Siano $p(t)$ e $q(t)$ le distanze percorse rispettivamente dal punto A e dal punto B. Individuare tutte le forze esterne ed interne che agiscono sul sistema; utilizzando le equazioni cardinali della dinamica, dimostrare che le reazioni vincolari in A e in B, rispettivamente $\phi_A \,\widehat{\mathbf{i}}$ e $\phi_B \,\widehat{\mathbf{j}}$ stanno tra loro nel rapporto $\phi_A/\phi_B = q/p$; le equazioni cardinali sono sufficienti per descrivere univocamente il moto di questo sistema?



Svolgimento. Il momento angolare totale rispetto ad O è dato da

$$\boldsymbol{K}(O) = (A - O) \times (\dot{p}\,\widehat{\mathbf{j}}) + (B - O) \times (\dot{q}\,\widehat{\mathbf{i}}) = 0$$

Quindi, usando la seconda equazione cardinale:

$$0 = \dot{\boldsymbol{K}}(O) = (A - O) \times (\Phi_A \,\widehat{\mathbf{i}}) + (B - O) \times (\Phi_B \,\widehat{\mathbf{j}}) = (\Phi_B \, q - \Phi_A \, p)\,\widehat{\mathbf{k}}$$

da cui la tesi.

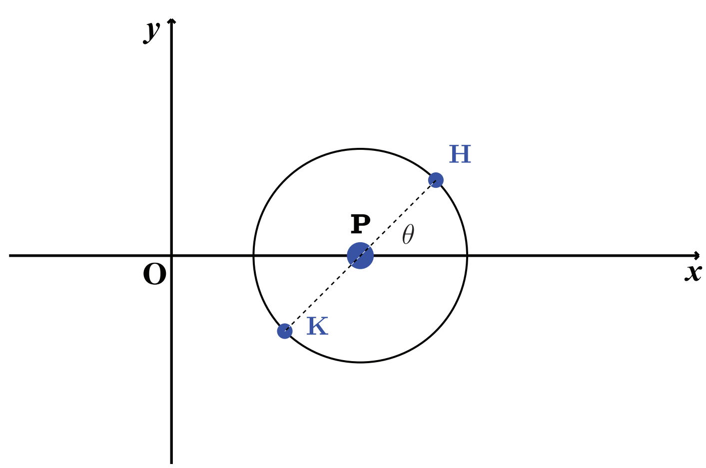
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Prova teorica del 10/2/2018

Prova teorica - C

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 10 febbraio 2018

1. Si consideri il sistema in figura, costituito da: un punto P di massa M che si muove lungo l'asse x con velocità costante v; due punti H e K di ugual massa m che si muovono su due punti diametralmente opposti di una circonferenza di centro P e raggio costante R, con θ l'angolo che il diametro HK forma con l'asse x. Usando il teorema di König, determinare il momento angolare totale del sistema rispetto al polo O; individuare entrambi i contributi del teorema di König.



Svolgimento. Siccome P è il centro di massa del sistema, abbiamo

$$\boldsymbol{K}(O) = (M + 2\,m)\,(P - O) \times \boldsymbol{v}_P + m\,\left[(H - P) \times \boldsymbol{v}'_H + (K - P) \times \boldsymbol{v}'_K\right]$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}'_H &= \boldsymbol{v}_H - \boldsymbol{v}_P = R\,\dot{\theta}\,(-\widehat{\mathbf{i}}\,\sin\theta + \widehat{\mathbf{j}}\,\cos\theta) \\
\boldsymbol{v}'_K &= -\boldsymbol{v}'_H = R\,\dot{\theta}\,(\widehat{\mathbf{i}}\,\sin\theta\widehat{\mathbf{j}}\,\cos\theta) \\
(P - O) \times \boldsymbol{v}_P &= (P - O) \times (v\,\widehat{\mathbf{i}}) = 0
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\boldsymbol{K}(O) = 0 + m\,\left[(H-K)\times \boldsymbol{v}'_H\right] = 2\,R^2\,m\,\dot\theta\,\left[(\widehat{\mathbf{i}}\cos\theta + \widehat{\mathbf{j}}\sin\theta)\times(-\widehat{\mathbf{i}}\sin\theta + \widehat{\mathbf{j}}\cos\theta)\right] =$$
$$= 2\,R^2\,m\,\dot\theta\,\widehat{\mathbf{k}}$$

I due contributi del teorema di König sono pertanto: Momento del centro di massa $\boldsymbol{K}_0 = 0$ e $\boldsymbol{K}' = 2\,R^2\,m\,\dot\theta\,\widehat{\mathbf{k}}$.

2. Sono dati i tre campi di velocità:

$$(i)\ \boldsymbol{v}(P) = v\,\widehat{\mathbf{k}} \quad (ii)\ \boldsymbol{v}(P) = v\,\widehat{\mathbf{k}} + 3\,\left(x'\,\widehat{\mathbf{j}} - y'\,\widehat{\mathbf{i}}\right) \quad (iii)\ \boldsymbol{v}(P) = 4\,\left(x'\,\widehat{\mathbf{j}} - y'\,\widehat{\mathbf{i}}\right)$$

dove $v \in \mathbb{R}$ e $P = P(x', y', z')$. Stabilire, per ciascuno di essi, la natura del moto ed individuare i vettori $\boldsymbol{v}(O')$ ed $\boldsymbol{\omega}$ che caratterizzano il campo di velocità.

Svolgimento.

(i) Moto traslatorio con $\boldsymbol{v}(O') = v\,\widehat{\mathbf{k}}$ ed $\boldsymbol{\omega} = 0$

(ii) Moto rototraslatorio con $\boldsymbol{\omega} = 3\,\widehat{\mathbf{k}}$ e $\boldsymbol{v}(O') = v\,\widehat{\mathbf{k}}$

(iii) Moto rotatorio con $\boldsymbol{v}(O') = 0$ e $\boldsymbol{\omega} = 4\,\widehat{\mathbf{k}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica - V. O.
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Prova teorica del 10/2/2018

Prova teorica - D

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 10 febbraio 2018

1. Un'asta AB di massa m e lunghezza L si muove nel piano orizzontale $O(x, y)$, libera di ruotare attorno all'estremo A che à fisso. Sull'estremo B viene applicata una forza $\boldsymbol{F}$ costante in modulo e diretta perpendicolarmente all'asta. Indicato con θ l'angolo che l'asta forma con l'asse x, verificare che, benchè la forza $\boldsymbol{F}$ non sia conservativa, esiste una funzione $V : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ tale che $Q_\theta = V'(\theta)$. Si può estendere tale funzione fuori dall'intervallo $[0, 2\pi)$?

Svolgimento. Mettiamo l'origine del sistema di riferimento in A, cio $O = A$. Abbiamo allora

$$
\begin{aligned}
& B - O = L\,(\widehat{\mathbf{i}}\cos\theta + \widehat{\mathbf{j}}\sin\theta) \\
& \frac{\partial B}{\partial \theta} = L\,(-\widehat{\mathbf{i}}\sin\theta + \widehat{\mathbf{j}}\cos\theta) \\
& \boldsymbol{F} = F\,(-\widehat{\mathbf{i}}\sin\theta + \widehat{\mathbf{j}}\cos\theta) \\
& Q_\theta = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial B}{\partial \theta} = F\,L
\end{aligned}
$$

Introdotta la funzione $V(\theta) = F\,L\,\theta$, la forza generalizzata Q_θ si può scrivere come derivata $Q_\theta = V'(\theta)$. Questo tuttavia è possibile solo nell'intervallo $[0, 2\pi)$, in quanto la forza $\boldsymbol{F}$ non ha circuitazione nulla e non è conservativa in tutto $\mathbb{R}^2$. Non si può quindi estendere l'espressione oltre tale intervallo.

2. Dimostrare che un quadrato ammette infinite terne principali d'inerzia con origine nel suo centro geometrico.

Svolgimento. Sappiamo che, in una terna centrata nel centro geometrico della figura, si ha $I_{11} = I_{22}$ e $I_{12} = 0$. Quindi, ruotando gli assi x e y di un angolo φ qualsiasi,

$$I'_{12} = I_{12} \cos 2\varphi + \frac{I_{22} - I_{11}}{2} \sin 2\varphi = 0.$$

Quindi la terna ruotata è principale d'inerzia per ogni φ. Ci sono quindi infinite terne principali d'inerzia.

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Prova teorica del 10/2/2018

Prova teorica - E

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 10 febbraio 2018

1. È dato il campo di velocità $\boldsymbol{v}(P) = \boldsymbol{v}(O') + \boldsymbol{\omega} \times (P - O')$ con

$$\boldsymbol{v}(O') = v\,\hat{\mathbf{i}} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega\,\hat{\mathbf{j}},$$

   v ed ω costanti. Dimostrare che si tratta di un moto rigido piano e determinare il centro istantaneo di rotazione.

Svolgimento. Dati due punti P e Q qualsiasi abbiamo:

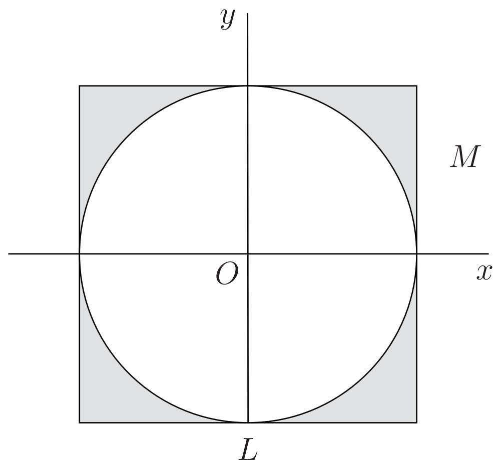
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(P) &= v\,\hat{\mathbf{i}} + \omega\,\hat{\mathbf{j}} \times (P - O') \\ \boldsymbol{v}(Q) &= v\,\hat{\mathbf{i}} + \omega\,\hat{\mathbf{j}} \times (Q - O') \\ \boldsymbol{v}(P) - \boldsymbol{v}(Q) &= \omega\,\hat{\mathbf{j}} \times (P - Q) \end{aligned}$$

cioè $\boldsymbol{v}(P) - \boldsymbol{v}(Q)$ è ortogonale a $(P - Q)$. Pertanto

$$\frac{d\,|P - Q|^2}{dt} = (P - Q) \cdot (\boldsymbol{v}(P) - \boldsymbol{v}(Q)) = 0$$

cioè P e Q si mantengono a distanza costante durante il moto.

2. Una figura piana omogenea di massa M è costituita da un quadrato di lato L privato del cerchio inscritto (vedi figura). Determinare la matrice d'inerzia in una terna solidale con l'origine nel centro della figura, gli assi x e y paralleli ai lati del quadrato e l'asse z ortogonale al piano della figura. Eseguire un solo integrale multiplo, ricavando i dati rimanenti dalle proprietà di simmetria e usando il teorema di Huygens. Dimostrare inoltre che la figura ammette infinite terne principali d'inerzia.



Svolgimento. Siano m_Q ed m_C le masse del quadrato pieno e del foro circolare. Abbiamo per il quadrato:

$$I_{11}^Q = \sigma \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} y^2\, dy\, dx = \sigma \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} dx =$$

$$= \sigma \int_{-L/2}^{L/2} 2\,\frac{L^3}{24}\, dx = \sigma\, \frac{L^4}{12} = \frac{1}{12}\, m_Q\, L^2$$

$$I_{22}^Q = I_{11}^Q = \frac{1}{12}\, m_Q\, L^2; \qquad I_{33}^Q = I_{22}^Q + I_{11}^Q = \frac{1}{6}\, m_Q\, L^2$$

$$I_{12}^Q = I_{13}^Q = I_{23}^Q = 0$$

Per il cerchio (con $R = L/2$):

$$I_{33}^C = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3\, dr\, d\theta = \sigma\, 2\,\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R =$$

$$= \sigma\, \pi\, \frac{R^4}{2} = \frac{1}{2}\, m_C\, R^2 = \frac{1}{8}\, m_C\, L^2$$

$$I_{11}^C = I_{22}^C = \frac{1}{2}\, I_{33}^C = \frac{1}{16}\, m_C\, L^2$$

$$I_{12}^C = I_{13}^C = I_{23}^C = 0$$

Per le masse abbiamo:

$$m_Q - m_C = M$$

$$\frac{m_C}{m_Q} = \frac{\pi (L/2)^2}{L^2} = \frac{\pi}{4}$$

da cui:

$$m_Q = \frac{4}{4-\pi}\, M; \qquad m_C = \frac{\pi}{4-\pi}$$

La matrice d'inerzia della figura è pertanto:

$$\begin{aligned}
&I_{11} = I_{11}^{Q} - I_{11}^{C} = \frac{1}{12}\, m_Q\, L^2 - \frac{1}{16}\, m_C\, L^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) \frac{M\, L^2}{4-\pi} \\
&I_{22} = I_{11} = \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) \frac{M\, L^2}{4-\pi} \\
&I_{33} = \frac{1}{2}\, I_{11} = \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) \frac{M\, L^2}{2\,(4-\pi)} \\
&I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0
\end{aligned}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Prova teorica del 10/2/2018

Prova teorica - F

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 10 febbraio 2018

1. Un cubo di lato L e massa M si muove nello spazio seguendo un campo di velocità caratterizzato dai vettori $\boldsymbol{v}(A) = v\,\widehat{\mathbf{j}}$ e $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\widehat{\mathbf{k}}$ dove A è un vertice del cubo. Calcolarne il momento angolare rispetto ad A e determinare la velocità del vertice opposto ad A.
   Dati aggiuntivi: la matrice d'inerzia di un cubo di lato L nel sistema di riferimento con gli assi paralleli ai lati e l'origine nel vertice A:

$$\mathbf{I}(A) = \frac{1}{3}\,M\,\begin{pmatrix} 2\,L^2 & -L^2/4 & -L^2/4 \\ -L^2/4 & 2\,L^2 & -L^2/4 \\ -L^2/4 & -L^2/4 & 2\,L^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Svolgimento. Interpretando $\widehat{\mathbf{i}}$, $\widehat{\mathbf{j}}$ e $\widehat{\mathbf{k}}$ come versori solidali, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}(A) &= M\,(P_0 - A) \times \boldsymbol{v}(A) + \mathbf{I}(A)\cdot\boldsymbol{\omega} = \\
&= M\,\frac{L}{2}\,(\widehat{\mathbf{i}}+\widehat{\mathbf{j}}+\widehat{\mathbf{k}}) \times (v\,\widehat{\mathbf{j}}) + \frac{1}{3}\,M\,\begin{pmatrix} 2\,L^2 & -L^2/4 & -L^2/4 \\ -L^2/4 & 2\,L^2 & -L^2/4 \\ -L^2/4 & -L^2/4 & 2\,L^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \\
&= M\,\frac{L}{2}\,(\widehat{\mathbf{i}}+\widehat{\mathbf{j}}+\widehat{\mathbf{k}}) \times (v\,\widehat{\mathbf{j}}) + \frac{1}{3}\,\omega\,L^2\left(2\,\widehat{\mathbf{k}} - \frac{\widehat{\mathbf{i}}+\widehat{\mathbf{j}}}{4}\right) = \\
&= \frac{M\,v\,L}{2}\,(\widehat{\mathbf{k}}-\widehat{\mathbf{i}}) + \frac{1}{3}\,\omega\,L^2\left(2\,\widehat{\mathbf{k}} - \frac{\widehat{\mathbf{i}}+\widehat{\mathbf{j}}}{4}\right) = \\
&= -\left(\frac{M\,v\,L}{2} + \frac{\omega\,L^2}{12}\right)\widehat{\mathbf{i}} - \frac{\omega\,L^2}{12}\,\widehat{\mathbf{j}} + \left(\frac{M\,v\,L}{2} + \frac{2}{3}\omega\,L^2\right)\widehat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Indivando con B il vertice opposto ad A abbiamo:

$$\boldsymbol{v}(B) = \boldsymbol{v}(A) + \boldsymbol{\omega} \times (B - A) = v\,\widehat{\mathbf{j}} + L\,\omega\,(\widehat{\mathbf{i}} - \widehat{\mathbf{j}})$$

2. Determinare il centro di massa di una figura composta da tre dischi omogenei di raggio R e masse M, $2\,M$ e $3\,M$ i cui centri sono disposti sui vertici di un triangolo equilatero di lato L.

Svolgimento. Indichiamo con A, B e C i vertici del triangolo e ponimo l'origine del sistema di riferimento in A. Siano M, $2\,M$ e $3\,M$ le masse dei dischi centrati rispettivamente in A, B e C. Abbiamo allora:

$$x_0 = \frac{1}{6\,M}\left(0 + \frac{L}{2}(2\,M) + L\,(3\,M)\right) = \frac{2}{3}\,L$$
$$y_0 = \frac{1}{6\,M}\left(0 + 0 + \frac{\sqrt{3}\,L}{2}\,(3\,M)\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\,L$$