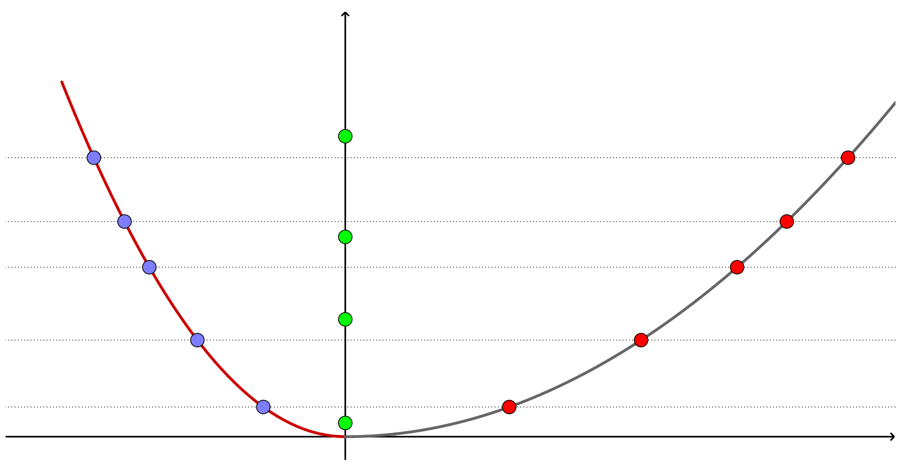
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2017/2018
Meccanica Razionale - Prova teorica del 13/1/2018

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 13 gennaio 2018

1. Un sistema rigido piano è costituito da N punti materiali P_1, P_2, ..., P_N appartenenti al piano $O(x, y)$. Di questi, i punti P_1, P_2, ..., P_k, $k < N/2$, hanno masse m_1, m_2, ..., m_k e sono situati sul ramo di parabola $y = x^2$ ad $x < 0$. A ciascuno di essi corrisponde un punto situato sul ramo di parabola $y = x^2/a$ (con $a > 0$) ad $x > 0$, posto alla stessa quota y e di massa doppia. I restanti punti sono situati sull'asse y. Determinare il valore di a per cui la terna $O(x, y, z)$ è principale d'inerzia. Dimostrare inoltre che, per il valore di a così trovato, il centro di massa del sistema giace sull'asse y.



Svolgimento. Il sistema è piano, quindi sappiamo già che $I_{13} = I_{23} = 0$. Dobbiamo quindi imporre $I_{12} = 0$ affinchè la terna $O(x, y, z)$ sia principale d'inerzia. Indichiamo con $\mathcal{S}_1$ l'insieme dei punti ad $x < 0$, con $\mathcal{S}_2$ l'insieme dei punti ad $x > 0$ e con $\mathcal{S}_3$ l'insieme dei punti sull'asse y. Abbiamo:

$$I_{12} = -\sum_{i \in \mathcal{S}_1} m_i\, x_i\, y_i - \sum_{i \in \mathcal{S}_2} m_i\, x_i\, y_i - \sum_{i \in \mathcal{S}_3} m_i\, x_i\, y_i$$

La somma sui punti di $\mathcal{S}_3$ è nulla, perchè $x_i = 0$ per tali punti. Le somme su $\mathcal{S}_1$ ed $\mathcal{S}_3$ contengono lo stesso numero di punti e possono essere raggruppati a coppie con la stessa y; inoltre, $x_i = -\sqrt{y_i}$ per $i \in \mathcal{S}_1$, $x_i = \sqrt{a\, y_i}$ per $i \in \mathcal{S}_2$. Ricordando la relazione tra le masse, questo fornisce

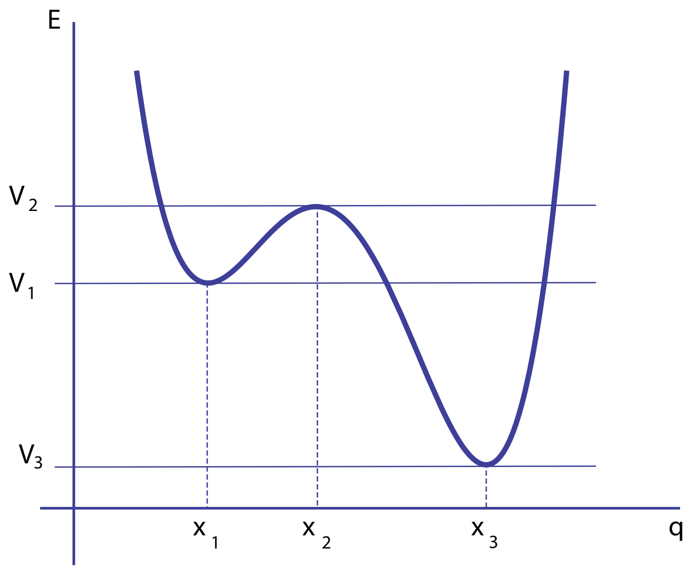
$$I_{12} = -\sum_{i\in\mathcal{S}_1} m_i\, y_i\, (-\sqrt{y_i} + 2\sqrt{a\, y_i})$$

da cui ricaviamo che $I_{12} = 0$ se $a = 1/4$. Per il centro di massa, con $a = 1/4$ e con M la massa totale del sistema, abbiamo:

$$M\, x_0 = -\sum_{i\in\mathcal{S}_1} m_i\, x_i - \sum_{i\in\mathcal{S}_2} m_i\, x_i - \sum_{i\in\mathcal{S}_3} m_i\, x_i = \sum_{i\in\mathcal{S}_1} m_i\, (-\sqrt{y_i} + 2\sqrt{a\, y_i}) = 0$$

2. Un punto materiale si muove lungo la direzione dell'asse x in un campo di forze la cui energia potenziale è rappresentata in figura. Si supponga inoltre che

$$\lim_{x\to 0^+} V(x) = \lim_{x\to +\infty} V(x) = +\infty.$$



Descrivere qualitativamente il moto del punto in corrispondenza alle seguenti condizioni iniziali $(x(0), \dot{x}(0))$:

(i) $(x_1, 0)$ *(ii)* $(x_2, 0)$ *(iii)* $(x_3, 0)$
(iv) (x_1, ε) *(v)* (x_2, ε) *(vi)* $(x_1 + \delta, 0)$
(vii) $(x_2 + \delta, 0)$ *(viii)* $(x_3 + \delta, 0)$

dove $\varepsilon > 0$ e $\delta \in \mathbb{R}$ sono parametri piccoli.

Svolgimento. Nei casi *(i)*, *(ii)* e *(iii)* il punto rimane in equilibrio rispettivamente in x_1, x_2 e x_3; in questi casi abbiamo rispettivamente $x(t) = x_1$, $x(t) = x_2$ e $x(t) = x_3$. Nel caso *(iv)* l'energia totale è di poco superiore a V_1 ed il moto del punto avviene in un piccolo intervallo attorno ad x_1; in *(v)* l'energia totale E è di poco superiore a V_2 ed il moto del punto avviene in un intervallo che ha per estremi le intersezioni della retta $y = E$ con il ramo di sinistra e quello di destra del profilo dell'energia potenziale; in *(vi)* il moto è simile al caso *(iv)*; in *(vii)* l'energia potenziale diminuisce, quindi il moto del punto avviene in un intervallo attorno ad x_1 se $\delta < 0$ e attorno a x_3 se $\delta > 0$; *(vii)* l'energia totale è di poco superiore a V_3 ed il punto oscilla in un piccolo intervallo attorno ad x_3.

3. Tre punti P_1, P_2 e P_3 si muovono nel piano $O(x,y)$ sulle traiettorie di equazione parametrica:

$$
\begin{aligned}
P_1(t) &= v\,t\,\widehat{\mathbf{i}} + R\left[-\widehat{\mathbf{i}}\sin 2\,t + \widehat{\mathbf{j}}\cos 2\,t\right] \\
P_2(t) &= v\,t\,\widehat{\mathbf{i}} + R\left[\widehat{\mathbf{i}}\cos(2\,t - \pi/6) + \widehat{\mathbf{j}}\sin(2\,t - \pi/6)\right] \\
P_3(t) &= v\,t\,\widehat{\mathbf{i}} + R\left[\widehat{\mathbf{i}}\cos(2\,t + 7\,\pi/6) + \widehat{\mathbf{j}}\sin(2\,t + 7\,\pi/6)\right]
\end{aligned}
$$

dove $v \in \mathbb{R}$ e $R > 0$. Usando la formula fondamentale dei moti rigidi, dimostrare che i tre punti formano un sistema rigido ed individuare i vettori $\boldsymbol{v}(O')$ ed $\boldsymbol{\omega}$ che caratterizzano il campo di velocità.

Svolgimento. Si tratta di verificare se le velocità dei tre punti appartengono allo stesso campo di velocità $\boldsymbol{v}(P_i) = \boldsymbol{v}(O') + \boldsymbol{\omega} \times (P_i - O')$. Abbiamo

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(P_1) &= v\,\widehat{\mathbf{i}} + 2\,R\left[-\widehat{\mathbf{i}}\cos 2\,t - \widehat{\mathbf{j}}\sin 2\,t\right] \\
\boldsymbol{v}(P_2) &= v\,\widehat{\mathbf{i}} + 2\,R\left[-\widehat{\mathbf{i}}\sin(2\,t - \pi/6) + \widehat{\mathbf{j}}\cos(2\,t - \pi/6)\right] \\
\boldsymbol{v}(P_3) &= v\,\widehat{\mathbf{i}} + 2\,R\left[-\widehat{\mathbf{i}}\sin(2\,t + 7\,\pi/6) + \widehat{\mathbf{j}}\cos(2\,t + 7\,\pi/6)\right]
\end{aligned}
$$

da cui deduciamo che $O' = v\,t\,\widehat{\mathbf{i}}$, $\boldsymbol{v}(O') = v\,\widehat{\mathbf{i}}$ e che $\boldsymbol{\omega} = 2\,\widehat{\mathbf{k}}$; infatti, notando che

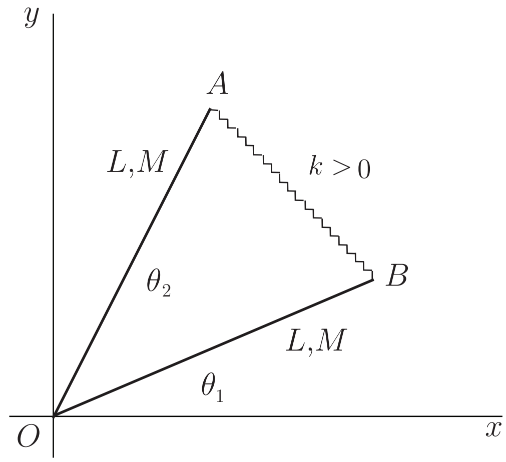
$$
\begin{aligned}
(P_1 - O') &= 2\,R\left[-\widehat{\mathbf{i}}\cos 2\,t - \widehat{\mathbf{j}}\sin 2\,t\right] \\
(P_2 - O') &= 2\,R\left[-\widehat{\mathbf{i}}\sin(2\,t - \pi/6) + \widehat{\mathbf{j}}\cos(2\,t - \pi/6)\right] \\
(P_3 - O') &= 2\,R\left[-\widehat{\mathbf{i}}\sin(2\,t + 7\,\pi/6) + \widehat{\mathbf{j}}\cos(2\,t + 7\,\pi/6)\right],
\end{aligned}
$$

abbiamo:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}(P_1) - v\,\widehat{\mathbf{i}} = 2\,R\left[-\widehat{\mathbf{i}}\cos 2\,t - \widehat{\mathbf{j}}\sin 2\,t\right] = (2\,\widehat{\mathbf{k}}) \times (P_1 - O') \\
&\boldsymbol{v}(P_2) - v\,\widehat{\mathbf{i}} = 2\,R\left[-\widehat{\mathbf{i}}\sin(2\,t - \pi/6) + \widehat{\mathbf{j}}\cos(2\,t - \pi/6)\right] = \\
&\quad = (2\,\widehat{\mathbf{k}}) \times (P_2 - O') \\
&\boldsymbol{v}(P_3) - v\,\widehat{\mathbf{i}} = 2\,R\left[-\widehat{\mathbf{i}}\sin(2\,t + 7\,\pi/6) + \widehat{\mathbf{j}}\cos(2\,t + 7\,\pi/6)\right] = \\
&\quad = (2\,\widehat{\mathbf{k}}) \times (P_3 - O')
\end{aligned}
$$

Le velocità dei tre punti appartengono pertanto allo stesso campo di velocità con $\boldsymbol{v}(O') = v\,\widehat{\mathbf{i}}$ e $\boldsymbol{\omega} = 2\,\widehat{\mathbf{k}}$ e costituiscono un sistema rigido.

4. Due aste OA e OB di ugual massa M e lunghezza L si muovono in un piano orizzontale, libere di ruotare, indipendentemente l'una dall'altra, attorno all'estremo comune O. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega gli estremi A e B delle due aste (vedi figura). Siano θ_1 e θ_2 gli angoli che le due aste formano con l'asse x. Individuare tutte le forze esterne ed interne che agiscono sul sistema; utilizzando le equazioni cardinali della dinamica, descrivere il moto del centro di massa del sistema; le equazioni cardinali sono sufficienti per descrivere univocamente il moto di questo sistema?



Svolgimento. Per descrivere il moto del centro di massa basta applicare la seconda equazione cardinale della dinamica a tutto il sistema, scegliendo O come polo,

$$\dot{\boldsymbol{K}}(O) = \boldsymbol{M}^e(O),$$

dove $\boldsymbol{M}^e(O)$ è il momento delle forze esterne rispetto ad O. Ma le uniche forze esterne sono le reazioni vincolari in O (la forza elastica della molla è una forza interna e il moto si svolge su un piano orizzontale, quindi la forza peso non va presa in considerazione) e quindi $\boldsymbol{M}^e(O) = 0$ che implica $\dot{\boldsymbol{K}}(O) = 0$, ovvero $\boldsymbol{K}(O) = cost.$ Per il momento angolare del sistema abbiamo:

$$\boldsymbol{K}(O) = \frac{1}{3}\, M\, L^2\, \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\, \widehat{\mathbf{k}}$$

da cui abbiamo $\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 = cost.$, cioè il centro di massa (che si trova sulla bisettrice delle due aste) si muove di moto circolare uniforme.

Le equazioni cardinali della dinamica non sono sufficienti per determinare il moto del sistema, che non è rigido.

5. L'espressione usuale per la forza elastica esercitata da una molla, $\boldsymbol{F} = -k\,x\,\widehat{\mathbf{i}}$ (in una dimensione) è in realtà un'approssimazione al primo ordine; includendo la correzione successiva, la forza elastica diventa $\boldsymbol{F} = (-k\,x + a\,x^3)\,\widehat{\mathbf{i}}$, dove $a \in \mathbb{R}$. Scrivere le equazioni di Lagrange per un sistema massa-molla ad un grado di libertà con quest'ultima espressione per la forza della molla.

Svolgimento. La forza assegnata può essere derivata dall'energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2 - \frac{1}{4}\,a\,x^4$$

L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2$$

e la Lagrangiana $\mathcal{L} = T - V$. Abbiamo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\,\dot{x}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -k\,x + a\,x^3$$

e l'equazione di Lagrange si scrive

$$m\,d\dot{x} + k\,x - a\,x^3 = 0$$

detta *equazione di Duffing*.

6. Tre punti P_1, P_2 e P_3 si muovono nel piano $O(x, y)$ sulle traiettorie di equazione parametrica:

$$P_1(t) = v\,t\,\widehat{\mathbf{i}} + R\,\left[-\widehat{\mathbf{i}}\,\sin 2\,t + \widehat{\mathbf{j}}\,\cos 2\,t\right]$$
$$P_2(t) = v\,t\,\widehat{\mathbf{i}} + R\,\left[\widehat{\mathbf{i}}\,\cos(2\,t - \pi/6) + \widehat{\mathbf{j}}\,\sin(2\,t - \pi/6)\right]$$
$$P_3(t) = v\,t\,\widehat{\mathbf{i}} + R\,\left[\widehat{\mathbf{i}}\,\cos(2\,t + 7\,\pi/6) + \widehat{\mathbf{j}}\,\sin(2\,t + 7\,\pi/6)\right]$$

dove $v \in \mathbb{R}$ e $R > 0$. Dimostrare che i tre punti formano un sistema rigido e determinarne i gradi di libertà.

Svolgimento. Dobbiamo dimostrare che $|P_1 - P_2| = cost.$, $|P_1 - P_3| = cost.$ e $|P_2 - P_3| = cost.$ Si può procedere in due modi:

1)
$$P_1 - P_2 = R\left[(-\sin 2\,t - \cos(2\,t - \pi/6))\,\widehat{\mathbf{i}} + (\cos 2\,t - \sin(2\,t - \pi/6))\,\widehat{\mathbf{i}}\right]$$

da cui

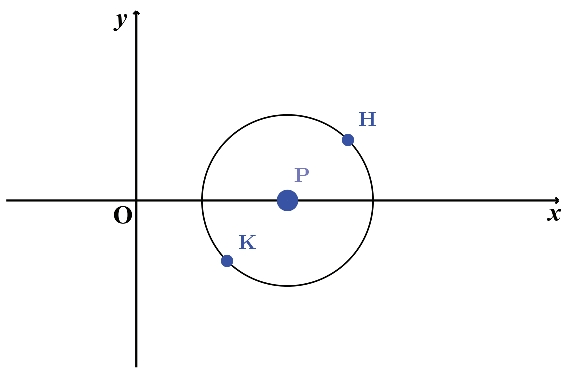
$$\begin{aligned}|P_1 - P_2|^2 &= (-\sin 2\,t - \cos(2\,t - \pi/6))^2 + (\cos 2\,t - \sin(2\,t - \pi/6))^2 = \\ &= 2 + \sin 2\,t\,\cos(2\,t - \pi/6) - \cos 2\,t\,\sin(2\,t - \pi/6) = 2 + \sin \pi/6 = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Procedendo in modo analogo si trova che $|P_1 - P_3|^2 = |P_2 - P_3|^2 = 5/2$, costanti nel tempo.

2) Notiamo che P_1, P_2 e P_3 stanno su una circonferenza di raggio R il cui centro si muove lungo l'asse x con velocità costante. Percorrono la circonferenza con la stessa velocità angolare, $\omega = 2$, e quindi mantengono durante tutto il moto la stessa disposizione che hanno all'istante iniziale; le loro distanze quindi non variano.

Il sistema costituito dai tre punti ha $l = 1$, cioè un solo grado di libertà.

7. Individuare i due contributi all'energia cinetica del teorema di König per il sistema in figura, costituito da: un punto P che si muove lungo l'asse x con velocità costante v; due punti H e K che si muovono su due punti diametralmente opposti di una circonferenza di centro P e raggio costante R.



Svolgimento. Sia M la massa di P e sia m le masse di H e K, supposte uguali. Il sistema è rigido ed abbiamo che P è il centro di massa e $\boldsymbol{v}(P) = v\,\widehat{\mathbf{i}}$. Indicando con θ l'angolo che la retta passante per H e K forma con l'asse x abbiamo, per la formula fondamentale dei moti rigidi:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(H) &= \boldsymbol{v}(P) + \boldsymbol{\omega} \times (H-P) = v\,\widehat{\mathbf{i}} + \dot\theta\,\widehat{\mathbf{k}} \times (H-P) = v\,\widehat{\mathbf{i}} + R\,\dot\theta\,\widehat{\mathbf{k}} \times (\widehat{\mathbf{i}}\cos\theta + \widehat{\mathbf{j}}\sin\theta) = \\ &= v\,\widehat{\mathbf{i}} + R\,\dot\theta\,(-\widehat{\mathbf{i}}\sin\theta + \widehat{\mathbf{j}}\cos\theta)\end{aligned}$$

pertanto la velocità relativa di H è

$$\boldsymbol{v}'(H) = \boldsymbol{v}(H) - \boldsymbol{v}(P) = R\,\dot\theta\,(-\widehat{\mathbf{i}}\sin\theta + \widehat{\mathbf{j}}\cos\theta)$$

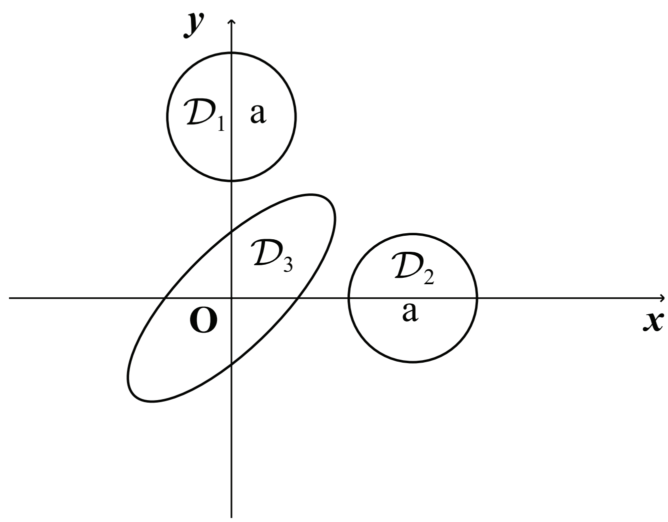
In modo analogo si trova che

$$\boldsymbol{v}'(K) = \boldsymbol{v}(K) - \boldsymbol{v}(P) = R\,\dot\theta\,(\widehat{\mathbf{i}}\sin\theta - \widehat{\mathbf{j}}\cos\theta)$$

Il teorema di König diventa dunque $T = T_0 + T'$ dove

$$T_0 = \frac{1}{2}(M + 2\,m)v^2 \qquad T' = \frac{1}{2}\,m(\boldsymbol{v}'(H)^2 + \boldsymbol{v}'(K)^2) = 2\,\frac{1}{2}\,m\,R^2\,\dot\theta^2 = m\,R^2\,\dot\theta^2$$

8. Una figura rigida piana è caratterizzata da una distribuzione di massa $\sigma(x, y)$ definita su tre domini disgiunti $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ e $\mathcal{D}_3$; su $\mathcal{D}_1$ abbiamo $\sigma(-x, y) = \sigma(x, y)$, su $\mathcal{D}_2$ $\sigma(x, -y) = \sigma(x, y)$ e su $\mathcal{D}_3$ abbiamo $\sigma(-x, -y) = \sigma(x, y)$ =costante su un'ellisse di centro l'origine, asse maggiore sulla bisettrice del I e III quadrante e asse minore sulla bisettrice del II e IV quadrante (la figura mostra una possibile realizzazione di tale sistema, a titolo di esempio). Verificare, con dimostrazione, se la terna $O(x, y, z)$ indicata in figura è principale d'inerzia e ripetere la dimostrazione in assenza dell'ellisse.



Svolgimento. Il sistema è piano, quindi sappiamo già che $I_{13} = I_{23} = 0$. Dobbiamo quindi imporre $I_{12} = 0$ affinchè la terna $O(x, y, z)$ sia principale d'inerzia. Abbiamo, per la proprietà additiva della massa,

$$I_{12} = -\int\int_{\mathcal{D}_1} x\, y\, \sigma(x, y)\, dS - \int\int_{\mathcal{D}_2} x\, y\, \sigma(x, y)\, dS - \int\int_{\mathcal{D}_3} x\, y\, \sigma(x, y)\, dS.$$

A questo punto, si può procedere in modo intuitivo o in modo più rigoroso. Intuitivamente, l'integrale su $\mathcal{D}_1$ è l'integrale di una funzione dispari in x su un dominio simmetrico rispetto all'asse y, quindi è nullo. Anche l'integrale su $\mathcal{D}_2$ è nullo, in quanto integrale di una funzione dispari rispetto ad y su un dominio simmetrico rispetto all'asse x. Per l'integrale su $\mathcal{D}_3$ invece abbiamo:

$$\int\int_{\mathcal{D}_3} x\, y\, \sigma(x, y)\, dS = \sigma \int\int_{\mathcal{D}_3} x\, y\, dS = 2\,\sigma \int\int_{\mathcal{D}_3(x>0)} x\, y\, dS,$$

che è non nullo per l'asimmetria del dominio rispetto all'asse x. La terna $O(x, y, z)$ indicata in figura quindi non è principale d'inerzia. In assenza dell'ellisse, abbiamo solo i contributi degli integrali su $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, che sono nulli; la terna è quindi principale d'inerzia.

In modo più rigoroso, dimostriamo che gli integrali sui domini $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sono nulli, limitatamente al caso di domini normali. Potremo quindi scrivere:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b; -\varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_1(y)\} \\ \mathcal{D}_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq d; -\psi_1(x) \leq x \leq \psi_1(x)\} \end{aligned}$$

e quindi

$$\int\int_{\mathcal{D}_1} x\, y\, \sigma(x, y)\, dS = \int_a^b \left[\int_{-\varphi_1(y)}^{\varphi_1(y)} \sigma(x, y)\, dx\right] dy = 0$$

perchè

$$\int_{-\varphi_1(y)}^{\varphi_1(y)} \sigma(x, y)\, dx = 0 \quad \forall\ y$$

in quanto integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico. In modo analogo di può ragionare per l'integrale su $\mathcal{D}_2$.

9. Individuare l'asse di Mozzi per il campo di velocità $\boldsymbol{v}(P) = \boldsymbol{v}(O') + \boldsymbol{\omega} \times (P - O')$ con

$$\boldsymbol{v}(O') = v\,\widehat{\mathbf{i}} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega\,\widehat{\mathbf{k}},$$

v ed ω costanti.

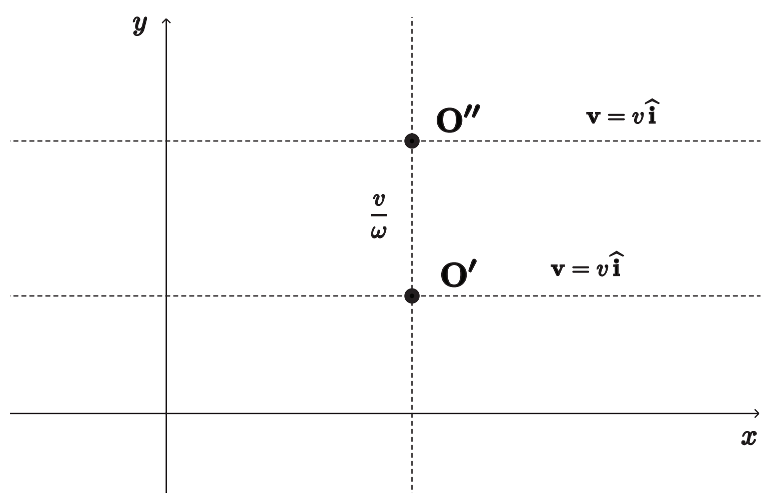
Svolgimento. Abbiamo $\boldsymbol{v}(O') \perp \boldsymbol{\omega}$ con $\boldsymbol{\omega}$ parallelo all'asse z; l'asse di Mozzi è pertanto una retta parallela all'asse z passante per il punto O'' del teorema di Mozzi. Per determinare O'' dobbiamo risolvere $\boldsymbol{v}(O') = \boldsymbol{\omega} \times (O' - O'')$. Ponendo $O' - O'' = x''\,\widehat{\mathbf{i}} + y''\,\widehat{\mathbf{j}}$ abbiamo

$$v\,\widehat{\mathbf{i}} = \omega\,\widehat{\mathbf{k}} \times (x''\,\widehat{\mathbf{i}} + y''\,\widehat{\mathbf{j}}) = \omega\,(-y''\,\widehat{\mathbf{i}} + x''\,\widehat{\mathbf{j}})$$

da cui $x'' = 0$, $y'' = -v/\omega$ e

$$O'' - O' = \frac{v}{\omega}\,\widehat{\mathbf{j}}$$

L'asse di Mozzi è quindi una retta parallela all'asse z e la sua intersezione con il piano (x, y) si muove parallelamente alla retta su cui si muove O', a distanza v/ω da essa.



10. Un'asta AB di massa m e lunghezza L si muove nel piano verticale $O(x, y)$, libera di ruotare attorno all'estremo A che à fisso. Sull'estremo B viene applicata una forza $\boldsymbol{F}$ costante in modulo e diretta perpendicolarmente all'asta. Verificare che la forza $\boldsymbol{F}$ non è conservativa e scrivere la forza generalizzata lagrangiana corrispondente.

Svolgimento. Sia θ l'angolo dell'asta con l'asse x. La forza è un vettore applicato al punto B ed è data da $\boldsymbol{F} = F(-\widehat{\mathbf{i}} \sin\theta + \widehat{\mathbf{j}} \cos\theta)$. Per dimostrare che non è conservativa, calcoliamone la circuitazione su una circonferenza di raggio L. notiamo innanzitutto che $\boldsymbol{F} = F\,\widehat{\mathbf{T}}$, dove $\widehat{\mathbf{T}}$ è il versore tangente alla circonferenza; abbiamo allora:

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot dP = \oint \boldsymbol{F} \cdot (L\widehat{\mathbf{T}}\, d\theta) = L\,F \int_0^{2\,\pi} \widehat{\mathbf{T}} \cdot \widehat{\mathbf{T}} = 2\,\pi\,L\,F \neq 0.$$

Alternativamente, potremmo scrivere la forza $\boldsymbol{F}$ come

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \frac{F}{L}\,(-\widehat{\mathbf{i}}\,y + \widehat{\mathbf{j}}\,x)$$

e calcolarne il rotore:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\widehat{\mathbf{k}} = 2\,\widehat{\mathbf{k}} \neq 0$$

Per calcolare la forza generalizzata lagrangiana scriviamo dapprima il vettore posizione del punto B:

$$B - O = L\,(\widehat{\mathbf{i}} \cos\theta + \widehat{\mathbf{j}} \sin\theta)$$

da cui

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = L\,(-\widehat{\mathbf{i}} \sin\theta + \widehat{\mathbf{j}} \cos\theta).$$

La forza generalizzata lagrangiana Q_θ è allora

$$Q_\theta = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial B}{\partial \theta} = L\,F$$

che ha le dimensioni fisiche di un momento.