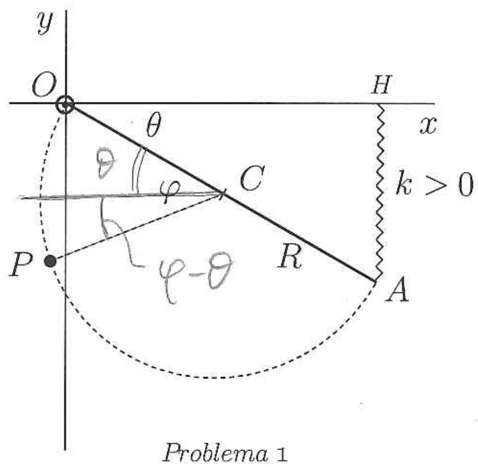
Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Informatica
Anno Accademico 2016/2017
Meccanica Razionale

Nome ....
N. Matricola ....

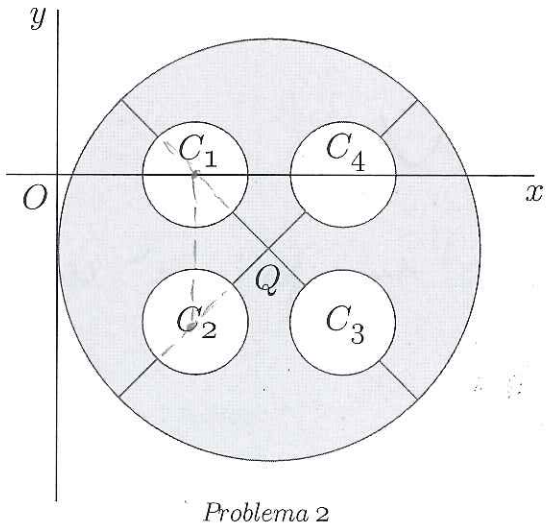
Ancona, 17 febbraio 2017

1. Un'asta OA, di lunghezza $2\,R$ e massa M, può ruotare attorno all'estremo O che è fisso nell'origine del piano verticale $O(x, y)$ (vedi figura). Una molla di costante elastica $k > 0$ collega l'estremo A con il punto H, proiezione ortogonale di A sull'asse x. Un punto P di massa m si muove sulla semicirconferenza (priva di massa) di raggio R e centro il punto medio dell'asta C. Scegliendo come coordinate lagrangiane gli angoli $\theta = \widehat{OAH}$ e $\varphi = \widehat{OCP}$ mostrati in figura, si chiede di:
   - scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema;
   - scrivere le equazioni di Lagrange.

2. Una lamina piana di massa M è costituita da un cerchio di centro Q e raggio R in cui sono praticati quattro fori circolari di centri C_1, C_2, C_3 e C_4 (vedi figura) e di ugual raggio $R/4$. I centri C_1, C_2, C_3 e C_4 sono situati a metà fra il centro Q e il bordo del disco; C_1 e C_3 sono disposti simmetricamente rispetto a Q, e così per C_2 e C_4, e giacciono su rette perpendicolari formanti angoli di $\pi/4$ e $-\pi/4$ con l'asse x. Calcolare la matrice d'inerzia della lamina nel sistema solidale $O(x, y, z)$ mostrato in figura, con l'asse x passante per C_1 e C_4 e l'asse y tangente al bordo del cerchio (vedi figura). Non si possono usare le formule dei momenti d'inerzia notevoli ricavate durante il corso (basta calcolare l'I_{33} di un cerchio rispetto al suo centro).



Problema 1



Problema 2

(1) $\underline{T = T_{asta} + T_P}$; $C-O = R(\hat{\imath}\cos\theta - \hat{\jmath}\sin\theta)$

$$I(O) = \frac{1}{3}M(2R)^2 = \frac{4}{3}MR^2;$$

$$P-O = P-C+C-O = -R[\hat{\imath}\cos(\varphi-\theta)+\hat{\jmath}\sin(\varphi-\theta)] + R(\hat{\imath}\cos\theta - \hat{\jmath}\sin\theta) = $$
$$= R[\cos\theta - \cos(\varphi-\theta)]\hat{\imath} - R[\sin\theta + \sin(\varphi-\theta)]\hat{\jmath}$$

$$I(C) = \frac{1}{12}M(2R)^2 = \frac{1}{3}MR^2; \quad \dot{P} = R[(\dot\varphi-\dot\theta)\sin(\varphi-\theta) - \dot\theta\sin\theta]\hat{\imath} - R[(\dot\varphi-\dot\theta)\cos(\theta-\varphi) + \dot\theta\cos\theta]$$

$$T_P = \frac{1}{2}m\dot{P}^2 = \frac{1}{2}mR^2\{(\dot\varphi-\dot\theta)^2 + \dot\theta^2 + 2\dot\theta(\dot\varphi-\dot\theta)\cos(\varphi-\cancel{\theta}+\cancel{\theta})\} =$$

$$= \frac{1}{2}mR^2\{\dot\varphi^2 + 2\dot\theta^2(1-\cos\varphi) - 2\dot\varphi\dot\theta(1-\cos\varphi)\} =$$

$$= \frac{1}{2}mR^2\{\dot\varphi^2 + 2(\dot\theta^2 - \dot\varphi\dot\theta)(1-\cos\varphi)\}$$

$$T_{asta} = \frac{1}{2}I(O)\dot\theta^2 = \frac{2}{3}MR^2\dot\theta^2$$

$$T = \frac{1}{2}mR^2\{\dot\varphi^2 + 2(\dot\theta^2-\dot\varphi\dot\theta)(1-\cos\varphi)\} + \frac{2}{3}MR^2\dot\theta^2$$

$$V = mgy_P + Mgy_C + \frac{1}{2}k(H-A)^2 = -mgR[\sin\theta + \sin(\varphi-\theta)] - MgR\sin\theta + \frac{1}{2}k(2R\sin\theta)^2$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

Da qui in poi è un esercizio di Analisi

(2) Cerchio generico di massa m, raggio R, centro C:

$$I_{33}(C) = \sigma \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr\, r \cdot r^2 = \sigma \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}(\sigma \pi R^2) R^2 = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I_{11} = I_{22} = \frac{1}{2} I_{33} = \frac{1}{4} m R^2 \qquad I_{12} = 0$$

Cerchio di centro Q (indichiamo con m_1 la sua massa):

$$I_{11} = \frac{1}{4} m_1 R^2 + m_1 \left(\frac{R}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) m_1 R^2 = \frac{3}{8} m_1 R^2$$

$$I_{22} = \frac{1}{4} m_1 R^2 + m_1 R^2 = \frac{5}{4} m_1 R^2 \; ; \; I_{12} = 0 - m_1 (R)\left(-\frac{R}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{m_1 R}{2\sqrt{2}}$$

Indichiamo con m_2 la massa di ciascuno dei fori

$$C_1: \; I_{11} = \frac{1}{4} m_2 \left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{1}{64} m_2 R^2 \qquad I_{22} = \frac{1}{64} m_2 R^2 + m_2 \left(R - \frac{R}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left[\frac{1}{64} + \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right] m_2 R^2$$

$$I_{12} = 0 \; ; \; I_{33} = \left[\frac{1}{32} + \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right] m_2 R^2$$

$$C_2: \; I_{11} = \frac{1}{64} m_2 R^2 + m_2 \left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{33}{64} m_2 R^2 \; ; \; I_{22} = \left[\quad\right] m_2 R^2$$

$$I_{12} = 0 - m_2 \left(-\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)\left(R - \frac{R}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = m_2 \frac{2\sqrt{2}-1}{4} R^2$$

$$I_{33} = \left[\frac{34}{64} + \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right] m_2 R^2$$

$$C_3: \; I_{11} = \frac{33}{64} m_2 R^2 \; ; \; I_{22} = \frac{1}{64} m_2 R^2 + m_2 \left(R + \frac{R}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left[\frac{1}{64} + \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right] m_2 R^2$$

$$I_{33} = \left[\frac{34}{64} + \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right] m_2 R^2 \; ; \; I_{12} = 0 - m_2 \left(-\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)\left(R + \frac{R}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = m_2 \frac{2\sqrt{2}+1}{4} R^2$$

$$C_4: \; I_{11} = \frac{1}{64} m_2 R^2 \; ; \; I_{22} = \left[\frac{1}{64} + \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right] m_2 R^2 \; ; \; I_{33} = \left[\frac{1}{32} + \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right] m_2 R^2$$

$$I_{12} = 0$$

$$m_1 = \sigma \pi R^2 = \frac{4}{3} M$$

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2 - 4\pi \left(\frac{R}{4}\right)^2} = \frac{M}{\frac{3}{4}\pi R^2} = \frac{4}{3}\frac{M}{\pi R^2}$$

$$m_2 = \sigma \pi \left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{1}{12} M$$

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}(\text{cerchio pieno}) - \sum_{i=1}^{4} \underline{\underline{I}}(\text{Cerchio}_i)$$

IL RESTO È ALGEBRA!