Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Informatica
Anno Accademico 2016/2017
Meccanica Razionale

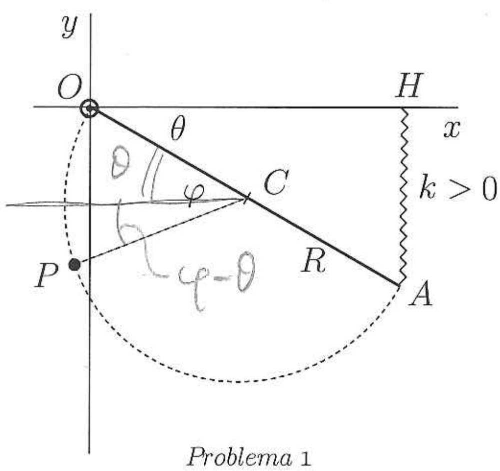
Nome ....

N. Matricola ....   Ancona, 17 febbraio 2017

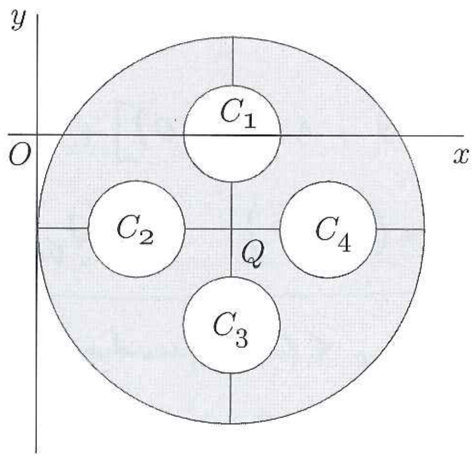
1. Un'asta OA, di lunghezza $2R$ e massa M, può ruotare attorno all'estremo O che è fisso nell'origine del piano verticale $O(x,y)$ (vedi figura). Una molla di costante elastica $k > 0$ collega l'estremo A con il punto H, proiezione ortogonale di A sull'asse x. Un punto P di massa m si muove sulla semicirconferenza (priva di massa) di raggio R e centro il punto medio dell'asta C. Scegliendo come coordinate lagrangiane gli angoli $\theta = \widehat{OAH}$ e $\varphi = \widehat{OCP}$ mostrati in figura, si chiede di:

   - scrivere l'energia potenziale del sistema;
   - determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità usando il criterio di Dirichlet e calcolare le reazioni vincolari all'equilibrio usando le equazioni cardinali della statica.

2. Una lamina piana di massa M è costituita da un cerchio di centro Q e raggio R in cui sono praticati quattro fori circolari di centri C_1, C_2, C_3 e C_4 (vedi figura) e di ugual raggio $R/4$. I centri C_1, C_2, C_3 e C_4 sono situati a metà fra il centro Q e il bordo del disco; C_1 e C_3 sono disposti simmetricamente rispetto a Q e così per C_2 e C_4. Calcolare la matrice d'inerzia della lamina nel sistema solidale $O(x,y,z)$ mostrato in figura, con l'asse x passante per C_1 e disposto parallelamente alla retta passante per i centri C_2 e C_4 e l'asse y, tangente al bordo del cerchio, disposto parallelamente alla retta passante per i centri C_1 e C_3 (vedi figura). Non si possono usare le formule dei momenti d'inerzia notevoli ricavate durante il corso (basta calcolare l'I_{33} di un cerchio rispetto al suo centro).



Problema 1



Problema 2

① $V = mg\,y_P + Mg\,y_C + \frac{1}{2}k(H-A)^2 =$

$$= -mgR[\sin\theta + \sin(\varphi-\theta)] - MgR\sin\theta + \frac{1}{2}k(2R\sin\theta)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = -mgR[\cos\theta - \cos(\varphi-\theta)] - MgR\cos\theta + 8kR^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = -mgR\cos(\varphi-\theta)$$

$$\begin{cases} mg[\cos\theta - \cos(\varphi-\theta)] + Mg\cos\theta - 8kR\sin\theta\cos\theta = 0 \\ \cos(\varphi-\theta) = 0 \end{cases}$$

$$[(mg+Mg) - 8kR\sin\theta]\cos\theta = 0$$

① $\cos\theta = 0 \;\left\langle \begin{array}{l} \theta = \pi/2 \\ \theta = 3\pi/2 \end{array}\right.$

② $\sin\theta = \frac{(m+M)g}{8kR} \;\left\langle \begin{array}{l} \theta = \theta_0 \\ \theta = \pi - \theta_0 \end{array}\right.$

$0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$

$$\varphi - \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \implies \varphi = \left\langle \begin{array}{l} \theta + \frac{\pi}{2} \\ \theta + \frac{3}{2}\pi \end{array}\right.$$

Equilibri: $Q_1 \equiv (\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = \pi)$, $Q_2 \equiv (\frac{\pi}{2}, 0)$, $Q_3 \equiv (\frac{3}{2}\pi, 0)$

$Q_4 \equiv (\frac{3}{2}\pi, \pi)$, $Q_5 \equiv (\theta_0, \theta_0 + \frac{\pi}{2})$, $Q_6 \equiv (\theta_0, \theta_0 + \frac{3}{2}\pi)$

$Q_7 \equiv (\pi - \theta_0, \frac{3}{2}\pi - \theta_0)$, $Q_8 \equiv (\pi - \theta_0, \frac{\pi}{2} - \theta_0)$

Matrice Hessiana:

$$V_{\theta\theta} = mgR[\sin\theta + \sin(\varphi-\theta)] + MgR\sin\theta + 8kR^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$V_{\varphi\varphi} = mgR\sin(\varphi-\theta)$ $\qquad V_{\theta\varphi} = -mgR\sin(\varphi-\theta)$

Da notare che $V_{\varphi\varphi} < 0$ quando $\varphi - \theta = \frac{3}{2}\pi$. Quindi $Q_{2,4,6,8}$ sono instabili

Q_1: $V_{\theta\theta} = 2mgR + MgR - 8kR^2$ $\qquad V_{\theta\varphi} = -mgR$ $\qquad V_{\varphi\varphi} = mgR$

$|H_1| = (2mgR + MgR - 8kR^2)mgR - (mgR)^2 = (mgR + MgR - 8kR^2)mgR$

stabile per $8kR^2 < (m+M)gR$

Q_3: $V_{\theta\theta} = -MgR + 8kR^2(-1) < 0$ instabile

Q_5:

Q_5: $$V_{\theta\theta} = (m+M)gR\,\frac{(m+M)g}{8kR} + mgR + 8kR^2\left[1 - 2\,\frac{(m+M)^2 g^2}{64k^2R^2}\right] =$$

$$= \frac{(m+M)^2 g^2}{8k} + mgR + 8kR^2 - \frac{(m+M)^2 g^2}{4k} =$$

$$= -\frac{(m+M)^2 g^2}{8k} + mgR + 8kR^2$$

$$V_{\varphi\varphi} = mgR \qquad V_{\varphi\theta} = -mgR$$

$$|H_5| = mgR\left[-\frac{(m+M)^2 g^2}{8k} + \cancel{mgR} + 8kR^2\right] - (mgR)^2 = (mgR)(8kR^2)\left[1 - \sin^2\theta_0\right]$$

>0 stabile

Q_7: $$V_{\theta\theta} = (m+M)gR\,\frac{(m+M)g}{8kR} - mgR + 8kR^2\left[1 - 2\,\frac{(m+M)^2 g^2}{64k^2R^2}\right] =$$

$$= \frac{(m+M)^2 g^2}{8k} - mgR + 8kR^2 - \frac{(m+M)^2 g^2}{4k} =$$

$$= -\frac{(m+M)g^2}{8k} - mgR + 8kR^2$$

$$V_{\varphi\varphi} = mgR \qquad V_{\theta\varphi} = -mgR$$

$$|H_7| = 8kR^2(mgR)\left(1 - \sin^2\theta_0\right) - 2(mgR)^2 =$$

$$= mgR\left\{8kR^2(1 - \sin^2\theta_0) - 2mgR\right\}$$ stabile se

$$8kR^2(1 - \sin^2\theta_0) - 2mgR > 0$$

② Cerchio generico di massa m, raggio R, centro C:

$$I_{33}(C) = \sigma \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R dr\, r \cdot r^2 = \sigma \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}(\sigma \pi R^2) R^2 = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I_{11} = I_{22} = \frac{1}{2} I_{33} = \frac{1}{4} m R^2 \qquad I_{12} = 0$$

Cerchio di centro Q (indichiamo con m_1 la sua massa):

$$I_{11} = \frac{1}{4} m_1 R^2 + m_1 \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 R^2 \ ; \quad I_{22} = \frac{1}{4} m_1 R^2 + m_1 R^2 = \frac{5}{4} m_1 R^2$$

$$I_{33} = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4}\right) m_1 R^2 = \frac{7}{4} m_1 R^2 ; \quad I_{12} = 0 - (R)\left(-\frac{R}{2}\right) m_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2$$

Indichiamo con m_2 la massa di ciascuno dei fori:

$$C_1: \ I_{11} = \frac{1}{4} m_2 \left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{1}{64} m_2 R^2 ; \quad I_{22} = \frac{1}{64} m_2 R^2 + m_2 R^2 = \frac{65}{64} m_2 R^2$$

$$I_{33} = \frac{66}{64} m_2 R^2 ; \quad I_{12} = 0$$

$$C_2: \ I_{11} = \frac{1}{64} m_2 R^2 + m_2 \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{17}{64} m_2 R^2 \quad I_{22} = I_{11}$$

$$I_{33} = \frac{17}{32} m_2 R^2 \qquad I_{12} = 0 - m_2 \left(\frac{R}{2}\right)\left(-\frac{R}{2}\right) = \frac{1}{4} m_2 R^2$$

$$C_3: \ I_{11} = \frac{1}{64} m_2 R^2 + m_2 R^2 = \frac{65}{64} m_2 R^2 \quad I_{22} = I_{11}$$

$$I_{33} = \frac{65}{32} m_2 R^2 \qquad I_{12} = 0 - m_2 (R)(-R) = m_2 R^2$$

$$C_4: \ I_{11} = \frac{1}{64} m_2 R^2 + m_2 \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{17}{64} m_2 R^2 ; \quad I_{22} = \frac{1}{64} m_2 R^2 + m_2 \left(\frac{3}{2} R\right)^2 = \frac{145}{64} m_2 R^2$$

$$I_{12} = 0 - m_2 \left(\frac{3}{2} R\right)\left(-\frac{R}{2}\right) = \frac{3}{4} m_2 R^2$$

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{M}{\pi R^2}$$

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}\,(\text{cerchio pieno}) - \sum_{i=1}^{4} \underline{\underline{I}}\,(\text{cerchio}_i)$$

$$m_1 = \frac{4}{3} M$$

IL RESTO È ALGEBRA !

$$m_2 = \frac{1}{12} M$$