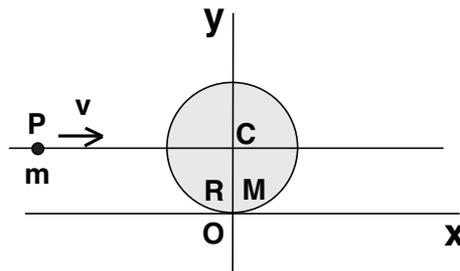


**Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica**  
**Anno Accademico 2012/2013**  
**Meccanica Razionale**

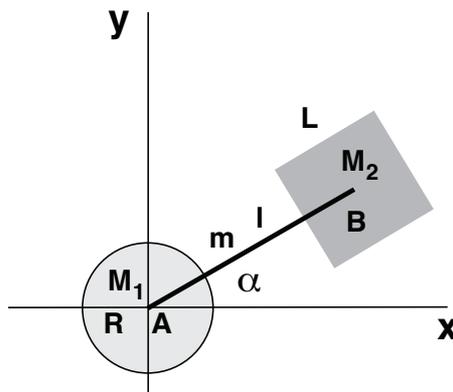
Nome .....  
 N. Matricola .....

Ancona, 19 aprile 2013

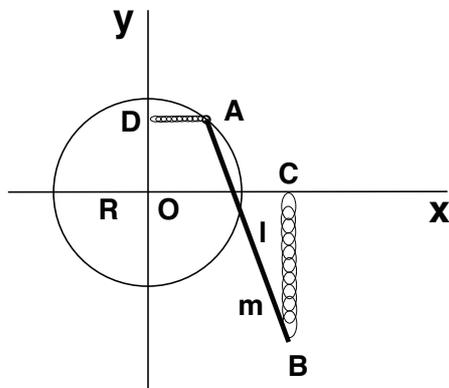
1. Un punto  $P$  di massa  $m$  ed un disco omogeneo di centro  $C$ , raggio  $R$  e massa  $M$  si muovono nel piano verticale  $O(x, y)$ . Il punto  $P$  scorre senza attrito sulla retta di equazione  $y = R$  ed il disco è inizialmente fermo con il centro sull'asse  $y$ . Quando  $P$  arriva in corrispondenza dell'asse  $y$ , impatta il centro del disco con un urto perfettamente elastico e da quell'istante il disco rotola senza strisciare sull'asse  $x$ . Calcolare la velocità del centro  $C$  dopo l'urto.



2. Una figura rigida piana è costituita da un'asta  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $l$ , a cui sono saldati: un disco di massa  $M_1 = m/4$ , raggio  $R = l/3$  e centro l'estremo  $A$  dell'asta e un quadrato di massa  $M_2 m/2$ , lato  $L = 2R$  e centro l'estremo  $B$  dell'asta, avente due lati perpendicolari e due lati paralleli alla direzione dell'asta. Determinare la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento  $O(x, y)$  indicato in figura, con l'origine coincidente con  $A$  e l'asta inclinata di un angolo  $\alpha$  rispetto all'asse  $x$  (*eseguire esplicitamente tutti i calcoli necessari, applicando, quando possibile, il teorema di Huygens, le formule di rotazione e considerazioni geometriche*). Individuare, quindi, per via geometrica, la direzione degli assi principali d'inerzia con origine in  $A$ .



3. Un'asta  $AB$  di lunghezza  $l$  e massa  $m$  si muove nel piano verticale  $O(x, y)$  come mostrato in figura. L'estremo  $A$  scorre senza attrito sulla circonferenza di raggio  $R$  e centro l'origine e l'asta è inoltre libera di ruotare attorno ad  $A$ . Una molla di costante  $k > 0$  collega l'estremo  $B$  dell'asta con il punto mobile  $C$ , proiezione ortogonale di  $B$  sull'asse  $x$ . Una seconda molla, sempre di costante elastica  $k > 0$ , collega l'estremo  $A$  con il punto mobile  $D$ , proiezione ortogonale di  $A$  sull'asse  $y$ .



Calcolare le configurazioni di equilibrio e le reazioni vincolari all'equilibrio, e studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate.

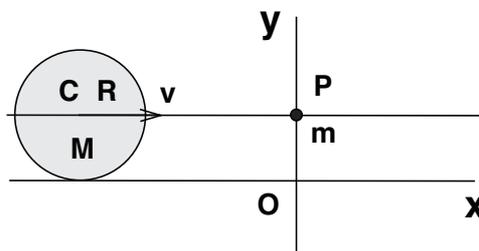
4. Scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema dell'esercizio precedente.

**Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica**  
**Anno Accademico 2012/2013**  
**Meccanica Razionale**

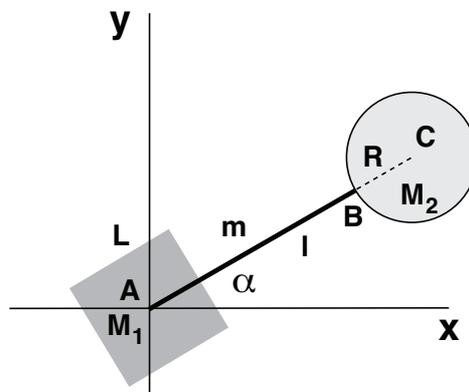
Nome .....  
 N. Matricola .....

Ancona, 19 aprile 2013

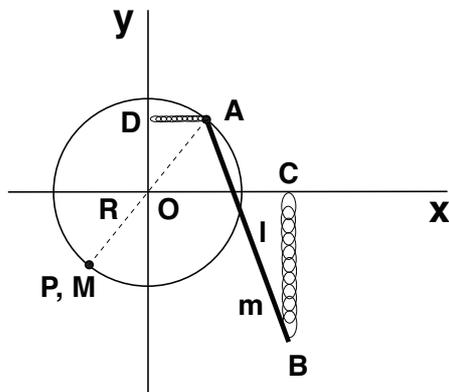
1. Un punto  $P$  di massa  $m$  ed un disco omogeneo di centro  $C$ , raggio  $R$  e massa  $M$  si muovono nel piano verticale  $O(x, y)$ . Il disco rotola senza strisciare sull'asse  $x$  ed il suo centro si muove con velocità  $v$  costante, mentre il punto  $P$  è inizialmente fermo sull'asse  $y$  ed è libero di scorrere senza attrito sulla retta di equazione  $y = R$ . Quando il disco arriva in corrispondenza dell'asse  $y$ , il suo centro impatta il punto  $P$  con un urto perfettamente elastico e da quell'istante il punto  $P$  scorre sulla retta  $y = R$ . Calcolare la velocità di  $P$  dopo l'urto.



2. Una figura rigida piana è costituita da un'asta  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $l$ , a cui sono saldati: un disco di massa  $M_1 = m/4$  e raggio  $R = l/3$  ed il cui centro  $C$  è situato sul prolungamento dell'asta a distanza  $R$  dall'estremo  $B$  (che quindi sta sul bordo del disco), e un quadrato di massa  $M_2 = m/2$ , lato  $L = 2R$  e centro l'estremo  $A$  dell'asta (che coincide con l'origine  $O$ ), avente due lati perpendicolari e due lati paralleli alla direzione dell'asta. Determinare la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento  $O(x, y)$  indicato in figura, con l'origine coincidente con  $A$  e l'asta inclinata di un angolo  $\alpha$  rispetto all'asse  $x$  (*eseguire esplicitamente tutti i calcoli necessari, applicando, quando possibile, il teorema di Huygens, le formule di rotazione e considerazioni geometriche*). Individuare, quindi, per via geometrica, la direzione degli assi principali d'inerzia con origine in  $A$ .



3. Un'asta  $AB$  di lunghezza  $l$  e massa  $m$  si muove nel piano verticale  $O(x, y)$  come mostrato in figura. L'estremo  $A$  è saldato sul bordo della circonferenza di raggio  $R$  e centro l'origine e l'asta è libera di ruotare attorno ad  $A$ . Un punto  $P$ , di massa  $M$ , è saldato sulla circonferenza in posizione diametralmente opposta ad  $A$  e la circonferenza può inoltre ruotare attorno al suo centro. Una molla di costante  $k > 0$  collega l'estremo  $B$  dell'asta con il punto mobile  $C$ , proiezione ortogonale di  $B$  sull'asse  $x$ . Una seconda molla, sempre di costante elastica  $k > 0$ , collega l'estremo  $A$  con il punto mobile  $D$ , proiezione ortogonale di  $A$  sull'asse  $y$ .



Calcolare le configurazioni di equilibrio e le reazioni vincolari all'equilibrio, e studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate.

4. Scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema dell'esercizio precedente.