Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica
Anno Accademico 2021/2022
Meccanica Razionale - Appello del 15/6/2022

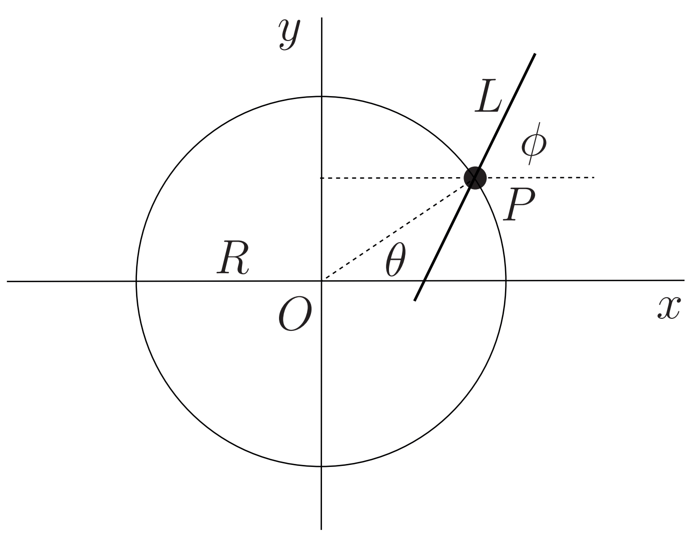
Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 15 giugno 2022

1. Un punto P di massa m scorre senza attrito sulla circonferenza di centro l'origine e raggio R nel piano verticale $O(x, y)$. Un'asta omogenea pesante di lunghezza L e massa M è libera di ruotare attorno al suo punto medio che coincide con P. Utilizzando le coordinate lagrangiane θ (angolo di P lungo la circonferenza) e φ (angolo dell'asta con l'orizzontale) come in figura si chiede di:

   - scrivere l'energia cinetica del sistema;
   - scrivere l'energia potenziale del sistema;
   - scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema.

   Quindi, in alternativa:

   - trasformare le equazioni del moto in un sistema del primo ordine e determinare e classificare i punti critici, trascurando l'equazione per φ; oppure:
   - determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità usando il criterio di Dirichlet.



$$T = T_p + T_{asta} =$$

$$= \frac{1}{2} m v_p^2 + \frac{1}{2} M v_p^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} M L^2\right)\dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(m+M)R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{12} M L^2 \dot{\varphi}^2\right]$$

$$V = m g R \operatorname{sen}\vartheta + M g R \sin\vartheta = (m+M) g R \operatorname{sen}\vartheta$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = (m+M)R^2\dot{\theta} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{12} M L^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -(m+M) g R \cos\vartheta \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\begin{cases} \cancel{(m+M)} R^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + \cancel{(m+M)} g \cancel{R} \cos\vartheta = 0 \\ \ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\cos\theta \\ \ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

$y_1 = \theta \qquad y_2 = \dot{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{g}{R}\cos y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = 0 \\ \cos y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{\pi}{2} \\ y_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = -\frac{\pi}{2} \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial y_1} = 0 \qquad \frac{\partial h_1}{\partial y_2} = 1$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial y_1} = \frac{g}{R}\operatorname{sen} y_1 \qquad \frac{\partial h_2}{\partial y_2} = 0$$

$y_1 = \pi/2$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/R & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ g/R & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{g^2}{R^2} = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm \frac{g}{R}$$

SELLA

INSTABILE

$y_1 = -\pi/2$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/R & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -g/R & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{g^2}{R^2} = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm i \frac{g}{R}$$

CENTRO STABILE

Dirichlet :

$$V = (m+M) g R \sin\theta$$

$$V' = (m+M) g R \cos\theta$$

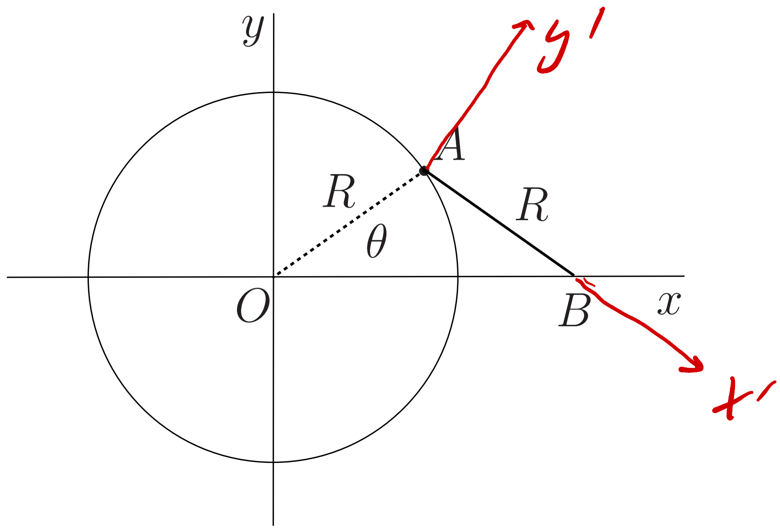
$$V'' = -(m+M) g R \sin\theta$$

$V' = 0$ $\quad \cos\theta = 0 \quad \theta = \pm \pi/2$

$V''(\pi/2) = -(m+M) g R < 0$ INST

$V''(-\pi/2) = +(m+M) g R > 0$ STAB

2. Un'asta AB di lunghezza R si muove nel piano $O(x, y)$ con un estremo scorrevole sulla circonferenza di centro l'origine e raggio R e l'altro sull'asse delle x. Scrivere le equazioni della base e della rulletta dell'asta, usando come coordinata Lagrangiana l'angolo θ che il vettore $A - O$ forma con l'asse delle x.



Base

$$A - O = R\left(\hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

$$\vec{v}(A) = R\dot{\theta}\left(-\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{\jmath}\cos\theta\right)$$

$$0 = R\dot{\theta}\left(-\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{\jmath}\cos\theta\right) -$$

$$- \dot{\theta}\,\hat{k}\times\left[(x_c - R\cos\theta)\hat{\imath} + (y_c - R\,\mathrm{sen}\,\theta)\hat{\jmath}\right]$$

$$0 = R\left(-\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{\jmath}\cos\theta\right) -$$

$$- \left[(x_c - R\cos\theta)\hat{\jmath} - (y_c - R\,\mathrm{sen}\,\theta)\hat{\imath}\right]$$

$$\begin{cases} y_c - R\sin\theta - R\sin\theta = 0 \\ x_c - R\cos\theta - R\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$y_c = 2R\sin\theta$$

$$x_c = 2R\cos\theta$$

$$\begin{cases} x_c = 2R\cos\theta \\ y_c = 2R\sin\theta \end{cases}$$

Rullette

$$\begin{cases} \hat{\imath}' = \hat{\imath} \cos\vartheta - \hat{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ \hat{\jmath}' = \hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \hat{\jmath}\cos\vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\imath} = \hat{\imath}' \cos\vartheta + \hat{\jmath}'\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ \hat{\jmath} = -\hat{\imath}'\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \hat{\jmath}'\cos\vartheta \end{cases}$$

$$\vec{v}(A) + \vec{\omega} \times (C - A) = 0$$

$$C - A = x_c' \hat{\imath}' + y_c' \hat{\jmath}'$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\hat{k}'$$

$$R\cancel{\dot{\theta}}\left(-\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \hat{\jmath}\cos\vartheta\right) - \cancel{\dot{\theta}}\,\hat{k}' \times \left(x_c' \hat{\imath}' + y_c' \hat{\jmath}'\right) = 0$$

$$R\left\{-\left(\hat{\imath}'\cos\vartheta + \hat{\jmath}'\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right)\mathrm{sen}\,\vartheta + \right.$$

$$\left. + \left(-\hat{\imath}'\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \hat{\jmath}'\cos\vartheta\right)\cos\vartheta\right\} - \left(x_c' \hat{\jmath}' - y_c' \hat{\imath}'\right) = 0$$

$\hat{i}'$ $R(-2\,\text{sen}\,\vartheta\cos\vartheta) + y_c' = 0$

$\hat{j}'$ $R(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) - x_c' = 0$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_c' = R\cos 2\vartheta \\ y_c' = R\,\text{sen}\,2\vartheta \end{cases}$$

circonferenza

centro A

raggio R