

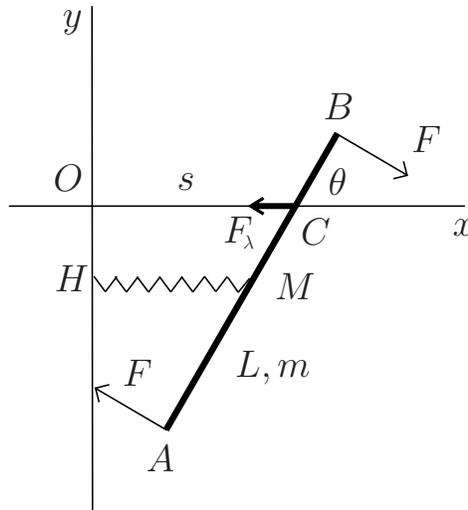
Esercizi di Meccanica Razionale

Nome
N. Matricola

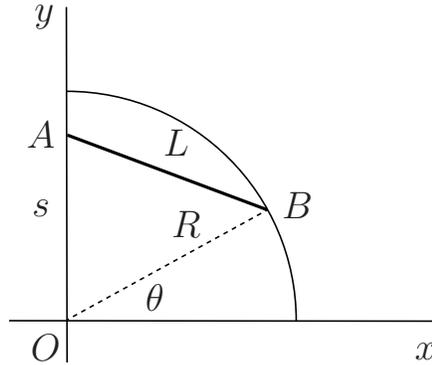
Ancona, 13 luglio 2021

1. Un'asta omogenea pesante AB di lunghezza L e massa m si muove sul piano verticale $O(x, y)$. Il punto C dell'asta, posto a distanza $L/4$ dall'estremo B , scorre senza attrito sull'asse x e l'asta è libera di ruotare attorno ad esso. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto medio dell'asta M con la sua proiezione ortogonale H sull'asse y . Infine, due forze di ugual modulo F , perpendicolari all'asta ed opposte in verso sono applicate agli estremi A e B dell'asta come in figura. Una forza di attrito viscoso \mathbf{F}_λ di costante $\lambda > 0$ agisce inoltre sul punto C . Usando le coordinate lagrangiane s e θ indicate in figura:

- scrivere l'energia cinetica dell'asta;
- scrivere l'energia potenziale dell'asta;
- scrivere le equazioni di Lagrange per l'asta;
- partendo dalle equazioni ottenute, verificare se sono possibili i moti con C fermo (ma non vincolato) sull'asse y .

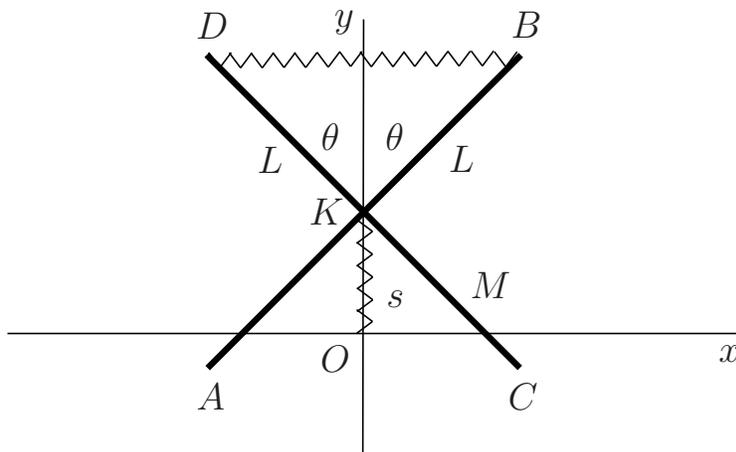


2. Un'asta AB di lunghezza L si muove sul piano $O(x, y)$, l'estremo A libero di scorrere sull'asse y e l'estremo B sulla circonferenza di centro l'origine e raggio R .



- individuare il numero di gradi di libertà del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;
- determinare per via geometrica il centro istantaneo di rotazione dell'asta;
- esprimere la velocità angolare ω dell'asta in funzione delle coordinate lagrangiane scelte.

3. Due aste omogenee pesanti uguali AB e CD di massa M e lunghezza $2L$ sono incernierate nel loro punto medio K , libere di ruotare attorno ad esso. Il punto K è inoltre libero di scorrere lungo l'asse y nel piano verticale $O(x, y)$. Il vincolo in K è realizzato in modo da mantenere la simmetria delle due aste, come nella figura. Due molle di costanti elastiche $k > 0$ collegano rispettivamente gli estremi D e B e il punto medio K con l'origine O .

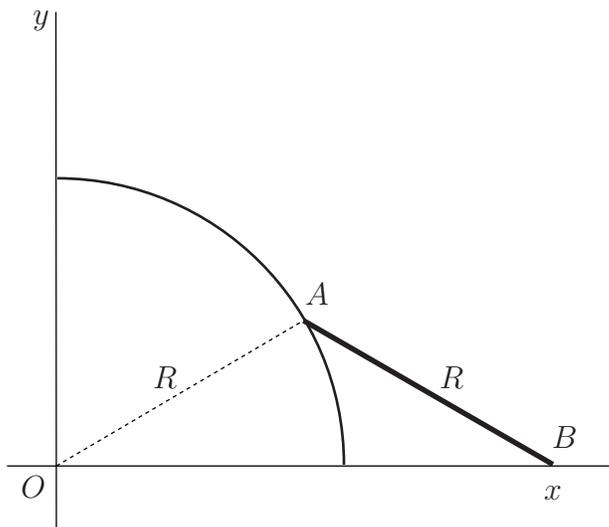


Utilizzando le coordinate lagrangiane s (l'ordinata di K) e θ (l'angolo che ciascuna delle due aste forma con l'asse y) indicate in figura, determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità utilizzando il criterio di Dirichlet.

4. Calcolare l'invariante scalare del sistema di vettori applicati $\{(A, \mathbf{u}_i)\}$, $i = 1, 2, 3$, con $A = (1, 1, 1)$ e

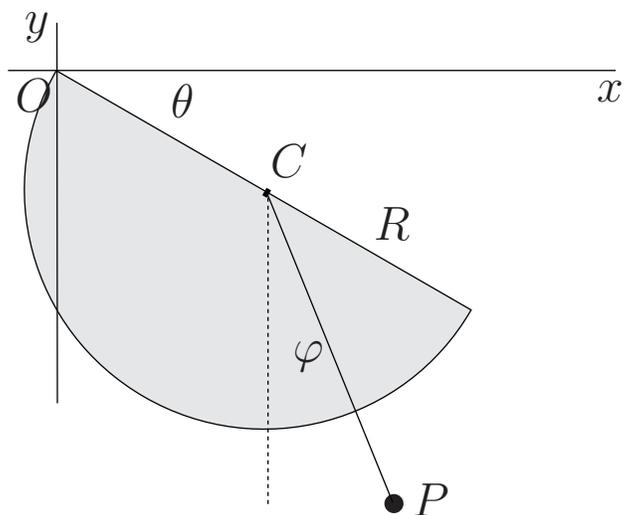
$$\mathbf{u}_1 = \alpha \hat{\mathbf{i}} \quad \mathbf{u}_2 = \alpha \hat{\mathbf{j}} \quad \mathbf{u}_3 = \alpha \hat{\mathbf{k}}$$

5. Un'asta AB di lunghezza R si muove sul piano $O(x, y)$, con l'estremo A vincolato a scorrere sulla circonferenza di centro l'origine e raggio R e l'estremo B sull'asse x . Determinare



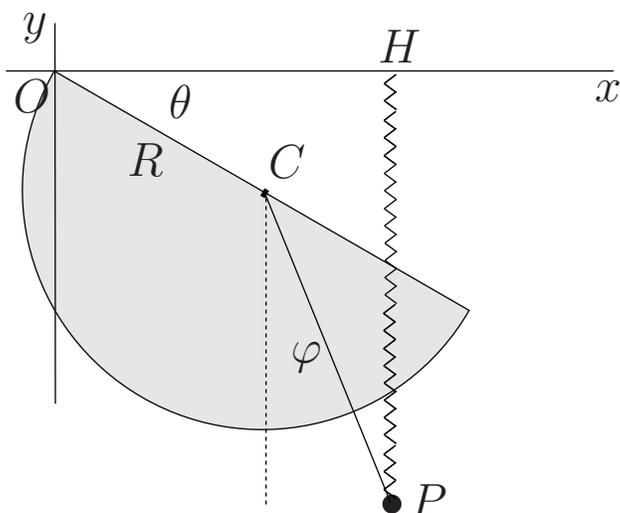
geometricamente il centro istantaneo di rotazione e scrivere l'equazione cartesiana della base.

6. (Equilibrio e stabilità) Un semicerchio di raggio R , centro C e diametro AB si muove nel piano verticale $O(x, y)$ con l'estremo diametrale A fisso nell'origine, $A \equiv O$. Un pendolo matematico di massa m e lunghezza l si muove nello stesso piano verticale $O(x, y)$, sospeso nel centro del semicerchio C .



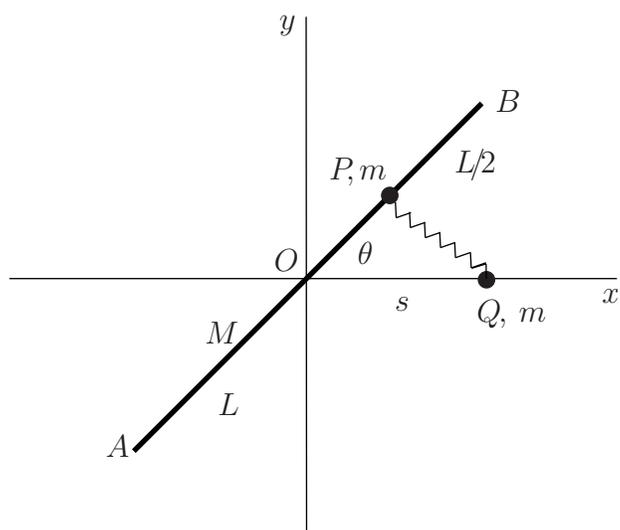
Utilizzando le coordinate lagrangiane θ e φ indicate in figura, determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

7. (Lagrange) Un semicerchio di raggio R , centro C e diametro AB si muove nel piano verticale $O(x, y)$ con l'estremo diametrico A fisso nell'origine, $A \equiv O$. Un pendolo matematico di massa m e lunghezza l si muove nello stesso piano verticale $O(x, y)$, sospeso nel centro del semicerchio C . Infine, una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto P con la sua proiezione ortogonale H sull'asse x .



Utilizzando le coordinate lagrangiane θ e φ indicate in figura, scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema.

8. Un'asta omogenea pesante AB di massa M e lunghezza $2L$ è libera di ruotare attorno al suo punto medio O , che è fisso, nel piano verticale $O(x, y)$. Un punto P di massa m è saldato sull'asta ad una distanza $L/2$ da B , un secondo punto Q di massa m scorre senza attrito sulla retta orizzontale passante per O (presa come asse x). Una molla di costante elastica $k > 0$ collega P con Q ed una forza viscosa $\mathbf{F}_\lambda = -\lambda \mathbf{v}(Q)$ agisce sul punto Q .



Utilizzando le coordinate lagrangiane s (l'ascissa di Q) e θ (l'angolo dell'asta con l'asse x) indicate in figura,

- scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema;
- si consideri lo stesso problema su un piano orizzontale; studiare i possibili moti con l'asta disposta lungo l'asse x per tutta la durata del moto.