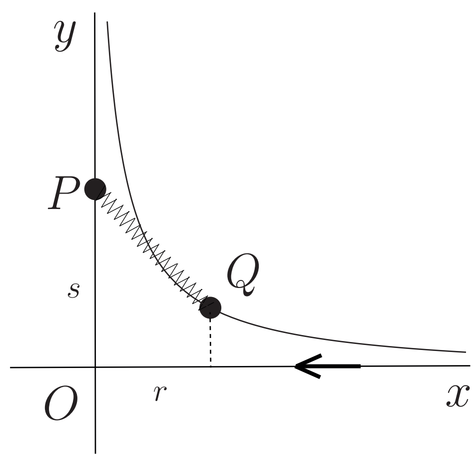
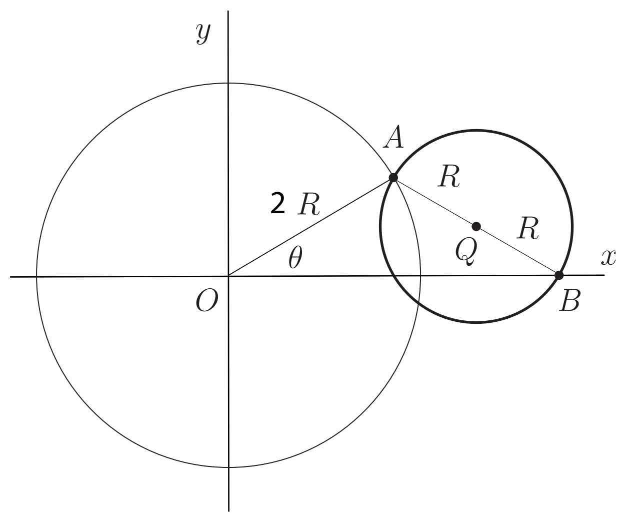
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica ed Automatica
Anno Accademico 2023/2024
Meccanica Razionale - Appello del 4/07/2024

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 4 luglio 2024

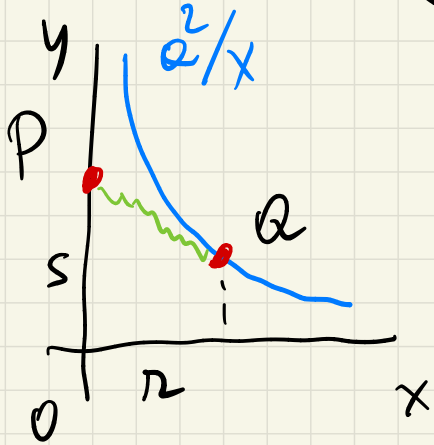
1. Un punto P di massa m si muove senza attrito sull'asse y nel piano verticale $O(x, y)$. Un secondo punto Q, sempre di massa m, si muove sul ramo dell'iperbole di equazione $y = a^2/x$ nel primo quadrante. Una molla di costante $k = 16\, m\, g/a$ collega tra loro P e Q. Utilizzando le coordinate lagrangiane s (ordinata di P) e r (ascissa di Q), determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.



2. Una circonferenza di raggio R si muove nel piano $O(x, y)$; il suo punto A scorre sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $2\,R$, mentre il punto B, diametralmente opposto ad A, scorre sull'asse x. Scrivere le equazioni della base e della rulletta della circonferenza, usando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che il vettore $P - O$ forma con l'asse x.



1



$$V = mgs + mg\frac{a^2}{r} + \frac{1}{2}k\left[r^2 + \left(s - \frac{a^2}{r}\right)^2\right]$$

$$V_s = mg + k\left(s - \frac{a^2}{r}\right)$$

$$V_r = -mg\frac{a^2}{r^2} + kr + \frac{a^2}{r^2}k\left(s - \frac{a^2}{r}\right)$$

$$V_{ss} = k \qquad V_{sr} = k\frac{a^2}{r^2}$$

$$V_{rr} = 2mg\frac{a^2}{r^3} + k - 2k\frac{a^2}{r^3}s + 3k\frac{a^4}{r^4}$$

$$V_s = 0 \quad , \quad V_r = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} mg + k\left(s - \frac{a^2}{r}\right) = 0 \\ -mg\frac{a^2}{r^2} + kr + \frac{a^2}{r^2}k\left(s - \frac{a^2}{r}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s - \frac{a^2}{r} = -\frac{mg}{k} \\ -mg\frac{a^2}{r^2} + kr - k\frac{a^2}{r^2}\frac{mg}{k} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s - \dfrac{a^2}{r} = -\dfrac{mg}{k} \\[2ex] -2mg\dfrac{a^2}{r^2} + kr = 0 \qquad\qquad / r^2 \end{cases}$$

$$kr^3 - 2mg\,a^2 = 0$$

$$r^3 = \frac{2mg\,a^2}{k} = \frac{2mg\,a^2 \cdot a}{16\,mg} = \frac{a^3}{8}$$

$$r = \frac{a}{2}$$

$$s - 2\frac{a^2}{a} = -\frac{mg\,a}{16\,mg} = -\frac{a}{16}$$

$$s = 2a - \frac{a}{16} = \frac{31}{16}a$$

equilibrio, $\left(\frac{31}{16}a,\ \frac{a}{2}\right)$

All'equilibrio

$$V_{ss} = k \qquad V_{sr} = k\,\frac{a^2 \cdot 4}{a^2} = 4k$$

$$V_{rr} = 2mg\,\frac{a^2}{r^3} + k - 2k\,\frac{a^2}{r^3}\,s + 3k\,\frac{a^4}{r^4}$$

$$= 2mg\,\frac{a^2 \cdot 8}{a^3} + k - 2k\,\frac{a^2 \cdot 8}{a^3}\,\frac{31}{16}a +$$

$$+ 3k\,\frac{a^4}{a^4} \cdot 16 =$$

$$= \frac{16mg}{a} + k - 31k + 48k =$$

$$= k + k - 31k + 48k = 19k$$

$$|H| = 19k^2 - 16k^2 = 3k^2 > 0 \qquad \text{STABILE}$$

2

$$0 = \vec{v}(C) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \times (C-A)$$

<u>Base:</u>

$$A-O = 2R\left(\hat{\imath}\cos\vartheta + \hat{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right)$$

$$C-A = (x_c - 2R\cos\vartheta)\,\hat{\imath} + (y_c - 2R\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}(A) = 2R\dot{\vartheta}\left(-\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \hat{\jmath}\cos\vartheta\right)$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\vartheta}\,\hat{k}$$

$$2R\cancel{\dot{\vartheta}}\left(-\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \hat{\jmath}\cos\vartheta\right) -$$

$$-\cancel{\dot{\vartheta}}\,\hat{k} \times \left[(x_c - 2R\cos\vartheta)\,\hat{\imath} + \right.$$

$$\left.(y_c - 2R\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\,\hat{\jmath}\right] = 0$$

$$2R(-\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \hat{\jmath}\cos\vartheta) - (x_c - 2R\cos\vartheta)\,\hat{\jmath}$$

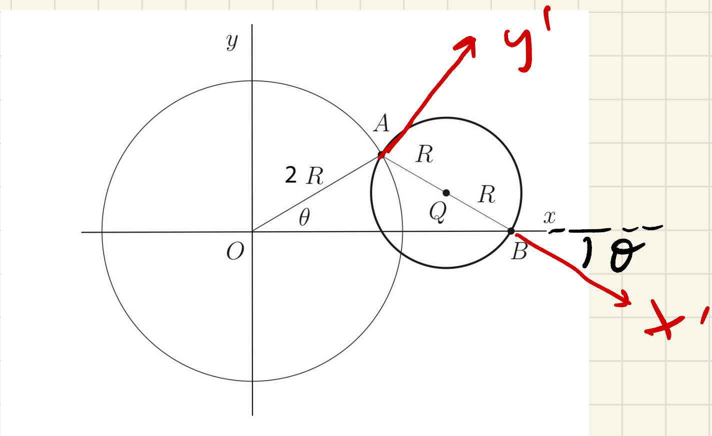
$$+ (y_c - 2R\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\,\hat{\imath} = 0$$

$$\begin{cases} -2R\,\mathrm{sen}\,\vartheta + y_c - 2R\,\mathrm{sen}\,\vartheta = 0 \\ 2R\cos\vartheta - x_c + 2R\cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_c = 4R\cos\vartheta \\ y_c = 4R\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$$

Circonferenza centro O raggio 4R

Rulletta



$$\begin{cases} \hat{i}' = \hat{i}\cos\vartheta - \hat{j}\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ \hat{j}' = \hat{i}\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \hat{j}\cos\vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{i} = \hat{i}'\cos\vartheta + \hat{j}'\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ \hat{j} = -\hat{i}'\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \hat{j}'\cos\vartheta \end{cases}$$

$$\vec{v}(A) = 2R\dot{\vartheta}\left(-\hat{i}\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \hat{j}\cos\vartheta\right) =$$

$$= 2R\dot{\vartheta}\left\{-\left(\hat{i}'\cos\vartheta + \hat{j}'\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right)\mathrm{sen}\,\vartheta + \right.$$

$$\left. + \left(-\hat{i}'\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \hat{j}'\cos\vartheta\right)\cos\vartheta\right\} =$$

$$= 2R\dot{\vartheta}\left\{-2\hat{i}'\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \hat{j}'\left(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta\right)\right\} =$$

$$= 2R\dot{\vartheta}\left\{-\hat{i}'\,\mathrm{sen}\,2\vartheta + \hat{j}'\cos 2\vartheta\right\}$$

$$C - A = x_c' \, \hat{\imath}' + y_c' \, \hat{\jmath}'$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta} \, \hat{k}'$$

$$2R\cancel{\dot{\theta}}\left\{-\hat{\imath}' \operatorname{sen} 2\vartheta + \hat{\jmath}' \cos 2\vartheta\right\} -$$

$$- \cancel{\dot{\theta}} \, \hat{k}' \times \left(x_c' \, \hat{\imath}' + y_c' \, \hat{\jmath}'\right) = 0$$

$$2R\left(-\hat{\imath}' \operatorname{sen} 2\vartheta + \hat{\jmath}' \cos 2\vartheta\right) - x_c' \, \hat{\jmath}' + y_c' \, \hat{\imath}' = 0$$

$$\begin{cases} y_c' = 2R \operatorname{sen} 2\vartheta \\ x_c' = 2R \cos 2\vartheta \end{cases}$$

Circonferenza centro A raggio 2R