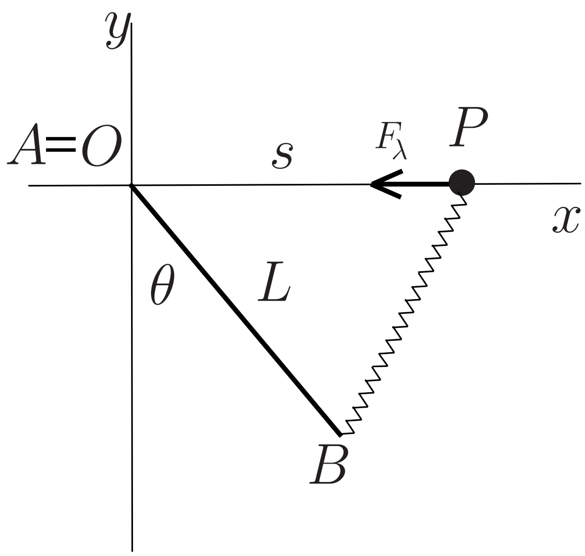
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica ed Automatica
Anno Accademico 2023/2024
Meccanica Razionale - Appello del 3/06/2024

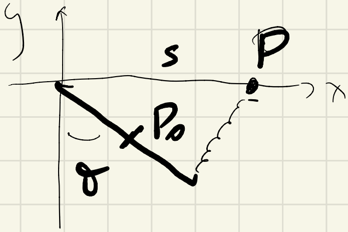
Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 3 giugno 2024

1. Un'asta AB di massa M e lunghezza L si muove nel piano verticale $O(x, y)$, libera di ruotare attorno all'estremo A, fisso nell'origine (cioè $O = A$). Un punto materiale P di massa m scorre lungo l'asse x, è soggetto ad una forza di attrito viscoso di costante $\lambda > 0$ ed è collegato all'estremo B dell'asta da una molla di costante elastica $k > 0$. Utilizzando le coordinate lagrangiane s (ascissa di P) e θ (angolo dell'asta con la verticale come in figura), scrivere le equazioni di Lagrange del sistema.



Suggerimento: il momento d'inerzia dell'asta rispetto a una retta perpendicolare all'asta e passante per un estremo è $M\,L^2/3$; rispetto ad una retta per il centro di massa è $M\,L^2/12$.

2. Usando il criterio di Dirichlet, determinare le configurazioni di equilibrio del sistema nell'esercizio precedente e studiarne la stabilità, senza prendere in considerazione la forza di attrito viscoso.



1

Energia cinetica

$$T = T_{asta} + T_P =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} M L^2\right)\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{s}^2$$

Energia potenziale

$$V = M g\, y_0 + \frac{1}{2} k\, \overline{BP}^2 =$$

$$= -M g \frac{L}{2} \cos\vartheta + \frac{1}{2} k \left(s^2 + L^2 - 2 s L \operatorname{sen}\vartheta\right)$$

$$P - O = s\, \hat{i}$$

$$\vec{F}_\lambda = -\lambda \vec{v}(P) = -\lambda \dot{s} \hat{i}$$

$$Q_s = \vec{F}_\lambda \cdot \frac{\partial P}{\partial s} = -\lambda \dot{s} \hat{i} \cdot \hat{i} = -\lambda \dot{s}$$

$$Q_\theta = 0$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = m \dot{s} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = -ks + kL \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3} M L^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -Mg \frac{L}{2} \operatorname{sen}\theta + ksL \cos\theta$$

Equazioni di Lagrange !

$$\begin{cases} m \ddot{s} + ks - kL \operatorname{sen}\theta = -\lambda \dot{s} \\ \frac{1}{3} M L^2 \ddot{\theta} + Mg \frac{L}{2} \operatorname{sen}\theta - ksL \cos\theta = 0 \end{cases}$$

2

$$V = -Mg\frac{L}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{2}k\left(s^2+L^2-2sL\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = ks - kL\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = Mg\frac{L}{2}\mathrm{sen}\,\vartheta - ksL\cos\vartheta$$

$$V_{ss} = k \qquad V_{s\vartheta} = -kL\cos\vartheta$$

$$V_{\vartheta\vartheta} = Mg\frac{L}{2}\cos\vartheta + ksL\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

$$\begin{cases} ks - kL\,\mathrm{sen}\,\vartheta = 0 \\ Mg\frac{L}{2}\mathrm{sen}\,\vartheta - ksL\cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = L \operatorname{sen}\vartheta \\ Mg\dfrac{L}{2}\operatorname{sen}\vartheta - kL^2 \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = L \operatorname{sen}\vartheta & (1) \\ L\left(\dfrac{Mg}{2} - kL\cos\vartheta\right)\operatorname{sen}\vartheta = 0 & (2) \end{cases}$$

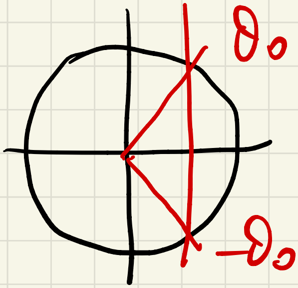
Dalla (2):

1 $\operatorname{sen}\vartheta = 0$ 2 $\cos\vartheta = \dfrac{Mg}{2kL}$

1 $\vartheta = 0, \pi$ $Q_1 \equiv (0,0)$

$s = 0$ $Q_2 \equiv (0,\pi)$

2 Deve essere $\dfrac{Mg}{2kL} < 1$ equilibri condizionati



$$s = \pm L \,\mathrm{sen}\, \vartheta_0$$

$$Q_3 \equiv (L \,\mathrm{sen}\,\vartheta_0 ,\ \vartheta_0)$$

$$Q_4 \equiv (-L\,\mathrm{sen}\,\vartheta_0 ,\ -\vartheta_0)$$

Stabilità:

$V_{ss} = k$ on Q_1, Q_2, Q_3, Q_4

Q_1 : $V_{s\vartheta} = -kL$

$$V_{\vartheta\vartheta} = \frac{MgL}{2} \qquad H = \begin{pmatrix} k & -kL \\ -kL & \frac{MgL}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(H) = \frac{MgkL}{2} - k^2L^2 =$$

$$= k^2L^2\left(\frac{Mg}{2kL} - 1\right)$$

stabile se $\frac{Mg}{2kL} > 1$

Q_2: $V_{s\theta} = kL$

$V_{\theta\theta} = -\frac{MgL}{2}$

$H = \begin{pmatrix} k & kL \\ kL & -\frac{MgL}{2} \end{pmatrix}$

$Det(H) = -\frac{MgkL}{2} - k^2L^2 < 0$

sempre instabile

Per Q_3 e Q_4 deve essere $\frac{Mg}{2kL} < 1$

Q_3 : $V_{s\theta} = -kL\cos\theta_0 = -kL\frac{Mg}{2kL} = -\frac{Mg}{2}$

$V_{\theta\theta} = Mg\frac{L}{2}\cos\theta_0 + ks_0 L\,\text{sen}\,\theta_0 =$

$$= Mg\frac{L}{2}\cos\theta_0 + kL^2 \,\text{sen}^2\theta_0 =$$

$$= \cancel{\frac{M^2 g^2}{4k}} + kL^2\left(1 - \cancel{\frac{M^2 g^2}{4k^2L^2}}\right) = kL^2$$

$$H = \begin{pmatrix} k & -\frac{Mg}{2} \\ -\frac{Mg}{2} & kL^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(H) = k^2L^2 - \left(\frac{Mg}{2}\right)^2 =$$

$$= k^2L^2\left[1 - \left(\frac{Mg}{2kL}\right)^2\right] > 0$$

Stabile quando esiste

Q_4 :

$$V_{s\theta} = -\frac{Mg}{2}$$

$$V_{\theta\theta} = kL^2$$

Same per Q_3