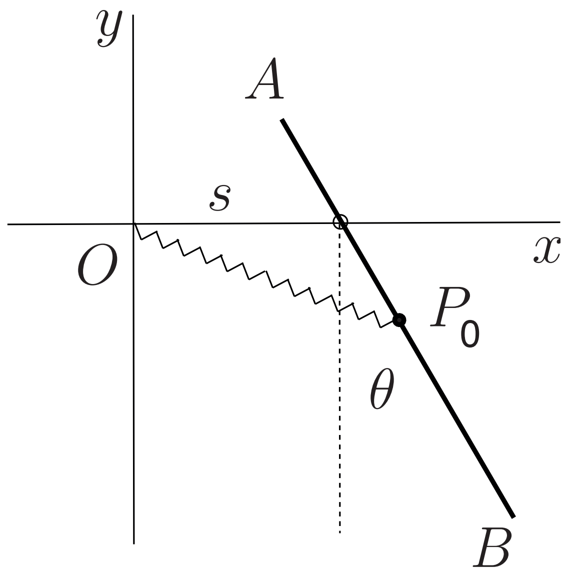
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica ed Automatica
Anno Accademico 2023/2024
Meccanica Razionale - Appello del 22/02/2024

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 22 febbraio 2024

1. Un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza L si muove nel piano verticale $O(x, y)$, libera di ruotare attorno al suo punto Q, situato a distanza $L/4$ dal centro di massa P_0 ed sua volta vincolato a scorrere senza attrito sull'asse x. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega P_0 con l'origine O. Utilizzando le coordinate lagrangiane s (ascissa di Q) e θ (angolo dell'asta con la verticale), determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità.



$$V = -mg\frac{L}{4}\cos\theta + \frac{1}{2}k\left[s^2 + \frac{L^2}{16} - 2\frac{L}{4}s\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right] =$$

$$= -mg\frac{L}{4}\cos\theta + \frac{1}{2}k\left[s^2 + \frac{L}{2}s\sin\theta\right]$$

$$V_s = ks + \frac{kL}{4}\sin\theta$$

$$V_\theta = mg\frac{L}{4}\sin\theta + \frac{kLs}{4}\cos\theta$$

$$V_{ss} = k \qquad V_{s\theta} = \frac{kL}{4}\cos\theta$$

$$V_{\theta\theta} = mg\frac{L}{4}\cos\theta - \frac{kLs}{4}\sin\theta$$

$$\begin{cases} ks + \frac{kL}{4}\sin\theta = 0 \\ mg\frac{L}{4}\sin\theta + \frac{kLs}{4}\cos\theta = 0 \end{cases}$$

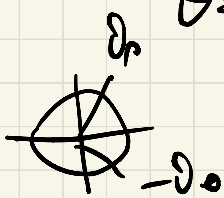
$$\begin{cases} s = -\frac{L}{4}\sin\theta \\ mg\frac{L}{4}\sin\theta - \frac{kL}{4}\frac{L}{4}\sin\theta\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = -\dfrac{L}{4}\sin\theta \\[2mm] \dfrac{L}{4}\sin\theta\left(mg - \dfrac{kL}{4}\cos\theta\right) = 0 \end{cases}$$

① $\sin\theta = 0 \qquad \theta = 0,\ \pi$

$s = 0 \qquad Q_1 \equiv (0,0) \qquad Q_2 \equiv (0,\pi)$

② $\cos\theta = \dfrac{4mg}{kL} \qquad \theta = \theta_0,\ -\theta_0$



$$s = -\frac{L}{4}\begin{cases} \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 \end{cases} = \mp\frac{L}{4}\sin\theta_0$$

$$Q_3 \equiv \left(-\frac{L}{4}\sin\theta_0,\ \cos^{-1}\frac{4mg}{kL}\right)$$

$$Q_4 = \left(\frac{L}{4} \sin\vartheta_0 \, , \, -\sin^{-1} \frac{4mg}{kL} \right)$$

Stabilità :

$$Q_1 : \quad H = \begin{pmatrix} k & kL/4 \\ kL/4 & mgL/4 \end{pmatrix}$$

$$\det(H) = \frac{mg\,kL}{4} - \frac{(kL)^2}{16}$$

$$= \frac{kL}{4} \left(mg - \frac{kL}{4} \right)$$

stabile per $mg < \frac{kL}{4}$

$$Q_2: \quad H = \begin{pmatrix} k & -kL/4 \\ -kL/4 & -mgkL/4 \end{pmatrix}$$

$$\det(H) = -\frac{mgkL}{4} - \frac{(kL)^2}{16}$$

$$< 0$$

$$Q_3: \quad V_{\theta\theta} = \frac{mgL}{4}\,\frac{4mg}{kL} - \frac{kL}{4}\left(-\frac{L}{4}\cos^2\theta\right) =$$

$$= \frac{m^2g^2}{k} + \frac{kL^2}{16}\left(1 - \frac{16\,m^2g^2}{k^2L^2}\right) =$$

$$= \frac{m^2g^2}{k} + \frac{kL^2}{16} - \frac{m^2g^2}{k} = \frac{kL^2}{16}$$

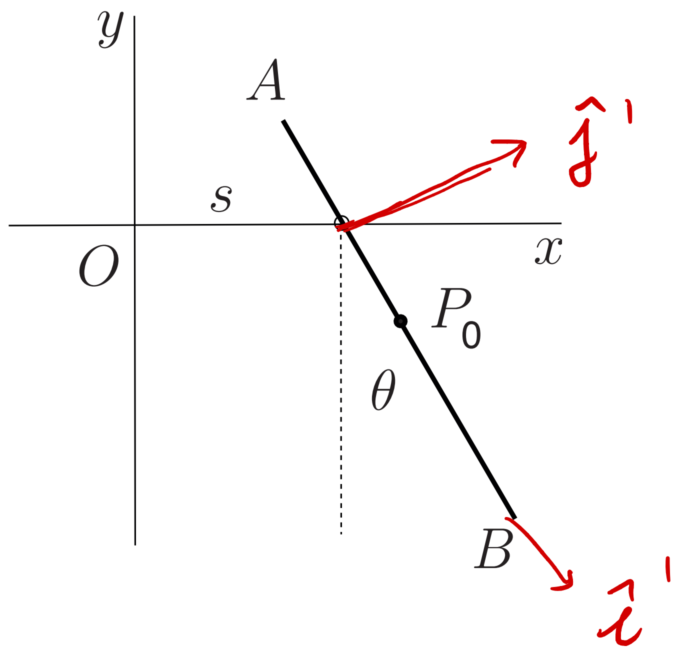
$$H = \begin{pmatrix} k & mg \\ mg & \frac{kL^2}{16} \end{pmatrix}$$

$$\det(H) = \frac{k^2L^2}{16} - m^2g^2$$

idem pr Q_4

Stable si $mg < \frac{kL}{4}$

2. Un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza L si muove nel piano verticale $O(x, y)$, libera di ruotare con velocità angolare $\dot{\theta} = \omega$ costante attorno al suo punto Q, situato a distanza $L/4$ dal centro di massa P_0 ed sua volta vincolato a scorrere con velocità costante $\dot{s} = v$ sull'asse x. Scrivere le equazioni della base e della rulletta dell'asta, nell'ipotesi $\omega = v/L$.



$$\begin{cases} \hat{j}' = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \hat{i}' = \hat{i}\,\mathrm{sen}\,\theta - \hat{j}\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{i} = \hat{i}'\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{j}'\cos\theta \\ \hat{j} = -\hat{i}'\cos\theta + \hat{j}'\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

<u>Base</u>: $C - O = x_c\,\hat{i} + y_c\,\hat{j}$

$Q - O = s\,\hat{i}$ $\qquad \vec{\omega} = \omega\,\hat{k} = \frac{v}{L}\,\hat{k}$

$\vec{v}(Q) = v\,\hat{i}$

$$0 = \vec{v}(Q) + \vec{\omega} \times (C - Q)$$

$$0 = v\,\hat{i} + \frac{v}{L}\,\hat{h} \times \left[(x_c - vt)\,\hat{i} + y_c\,\hat{j} \right]$$

$$v\,\hat{i} + \frac{v}{L}\left[(x_c - vt)\,\hat{j} - y_c\,\hat{i} \right] = 0$$

$$\begin{cases} y_c = L \\ x_c = vt \end{cases}$$

Retta // asse x

<u>Rulletta</u>:

$$0 = v\left(\hat{i}'\operatorname{sen}\vartheta + \hat{j}'\cos\vartheta\right) +$$

$$+ \frac{v}{L}\,\hat{h}' \times \left(x_c'\,\hat{i}' + y_c'\,\hat{j}' \right)$$

$$v\left(\hat{i}'\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{j}'\cos\theta\right) + \frac{v}{L}\left(x_c'\,\hat{j}' - y_c'\,\hat{i}'\right) = 0$$

$$\begin{cases} x_c' = -L\cos\theta \\ y_c' = L\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

circonferenza
centro Q
raggio L