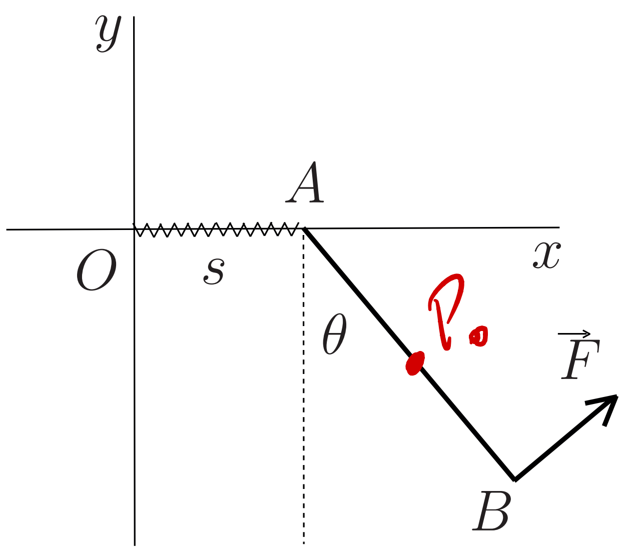
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica ed Automatica
Anno Accademico 2023/2024
Meccanica Razionale - Appello del 11/01/2024

Nome ....

N. Matricola ....

Ancona, 11 gennaio 2024

1. Un'asta AB di massa m e lunghezza L si muove nel piano verticale $O(x, y)$, libera di ruotare attorno all'estremo A, a sua volta vincolato a scorrere senza attrito sull'asse x. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega A con l'origine O ed una forza di modulo costante $\mathbf{F}$ agisce sull'estremo B, diretta perpendicolarmente all'asta. Utilizzando le coordinate lagrangiane s (ascissa di A) e θ (angolo dell'asta con la verticale), scrivere le equazioni di Lagrange del sistema.



$$P_0 - O = \left(s + \frac{L}{2} \operatorname{sen}\theta\right)\hat{\imath} - \frac{L}{2}\hat{\jmath}\cos\theta$$

$$\vec{v}_0 = \left(\dot{s} + \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\jmath} + \frac{L}{2}\dot{\theta}\hat{\jmath}\operatorname{sen}\theta$$

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m L^2\right)\dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m \left\{ \dot{s}^2 + \frac{L^2}{4} \dot{\theta}^2 + L \dot{s} \dot{\theta} \cos\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12} L^2 \dot{\theta}^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} m \left\{ \dot{s}^2 + \frac{L^2}{3} \dot{\theta}^2 + L \dot{s} \dot{\theta} \cos\theta \right\}$$

$$V = \frac{1}{2} k s^2 - mg \frac{L}{2} \cos\theta$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

La forza $\vec{F}$ non è conservativa

$$B - O = (s + L \operatorname{sen}\theta)\hat{\imath} - L \hat{\jmath} \cos\theta$$

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = L\left(\hat{\imath} \cos\theta + \hat{\jmath} \operatorname{sen}\theta\right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial s} = \hat{\imath}$$

$$\vec{F} = F\,\hat{e}_\theta = F\left(\hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial B}{\partial \theta} = FL$$

$$Q_s = \vec{F} \cdot \frac{\partial B}{\partial s} = F\cos\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3} m L^2 \dot{\theta} + \frac{1}{2} m L \dot{s} \cos\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} m L \dot{s} \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta - m g \frac{L}{2} \operatorname{sen}\theta$$

Eq. di Lagrange per θ:

$$\frac{1}{3} m L^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} m L \left(\ddot{s} \cos\theta - \cancel{\dot{s} \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} m L \cancel{\dot{s} \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta} + m g \frac{L}{2} \operatorname{sen}\theta = FL$$

$$\frac{1}{3} m L^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} m L \ddot{s} \cos\theta + m g \frac{L}{2} \operatorname{sen}\theta = FL$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = m \dot{s} + \frac{1}{2} m L \dot{\theta} \cos\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = -ks$$

Eq. di Lagrange per ϑ:

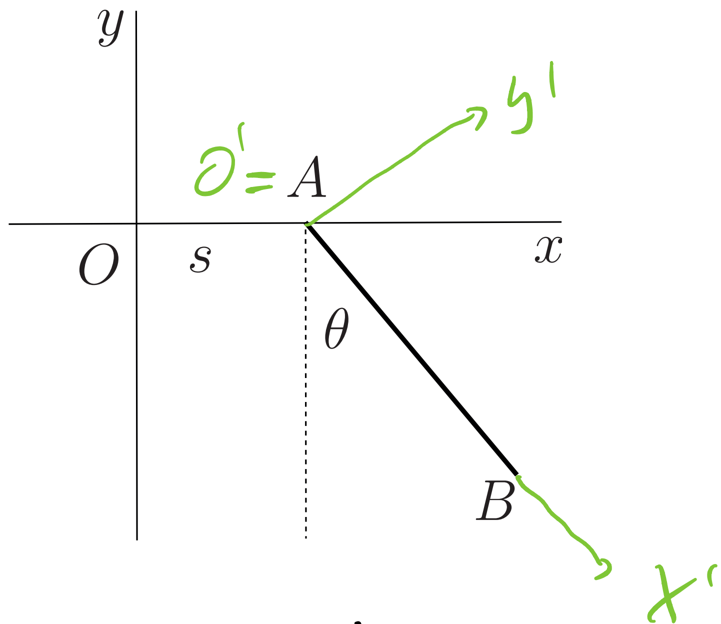
$$m\ddot{s} + \frac{1}{2} m L \left(\ddot{\theta} \cos\vartheta - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\vartheta \right) +$$

$$+ ks = F \cos\vartheta$$

$$m\ddot{s} + \frac{1}{2} m L \ddot{\theta} \cos\vartheta - \frac{1}{2} m L \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\vartheta +$$

$$+ ks = F \cos\vartheta$$

2. Un'asta AB di lunghezza L si muove nel piano $O(x, y)$, libera di ruotare con velocità angolare costante $\dot\theta = \omega$ attorno all'estremo A, a sua volta vincolato a scorrere senza attrito sull'asse x secondo la legge $A - O = s(t)\,\hat{\mathbf{i}} = R\,\hat{\mathbf{i}}\,\sin\omega t$. Scrivere le equazioni della base e della rulletta dell'asta.



$$\vec v(A) = R\omega\,\hat\imath\cos\omega t$$

$$C - O = x_c\,\hat\imath + y_c\,\hat\jmath \quad \text{(nel sistema fisso)}$$

$$\vec\omega = \dot\theta\,\hat k = \omega\,\hat k$$

$$0 = \vec v(C) = \vec v(A) + \vec\omega \times (C - A)$$

$$R\cancel{\omega}\,\hat\imath\cos\omega t + \cancel{\omega}\,\hat k \times \left[(x_c - R\,\mathrm{sen}\,\omega t)\,\hat\imath + y_c\,\hat\jmath\right] = 0$$

$$R\,\hat\imath\cos\omega t + (x_c - R\,\mathrm{sen}\,\omega t)\,\hat\jmath - y_c\,\hat\imath = 0$$

$$(R\cos\omega t - y_c)\,\hat{i} + (x_c - R\,\text{sen}\,\omega t)\,\hat{j} = 0$$

$$\begin{cases} x_c = R\,\text{sen}\,\omega t \\ y_c = R\cos\omega t \end{cases}$$

La base è una circonferenza di centro l'origine e raggio R

Per la rulletta:

$$\begin{cases} \hat{i}' = \hat{i}\,\text{sen}\,\vartheta - \hat{j}\cos\vartheta \\ \hat{j}' = \hat{i}\cos\vartheta + \hat{j}\,\text{sen}\,\vartheta \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \hat{i} = \hat{i}'\,\text{sen}\,\vartheta + \hat{j}'\cos\vartheta \\ \hat{j} = -\hat{i}'\cos\vartheta + \hat{j}'\,\text{sen}\,\vartheta \end{cases}$$

$$\vec{v}(A) = R\omega\,\hat{i}\cos\omega t =$$

$$= R\omega\left(\hat{i}'\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{j}'\cos\theta\right)\cos\omega t$$

$$C - O' = x_c'\,\hat{i}' + y_c'\,\hat{j}' = C - A$$

$$\vec{v}(A) + \vec{\omega} \times (C - A) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$R\cancel{\omega}\left(\hat{i}'\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{j}'\cos\theta\right)\cos\omega t +$$

$$+ \cancel{\omega}\,\hat{k}' \times \left(x_c'\,\hat{i}' + y_c'\,\hat{j}'\right) = 0$$

$$R\left(\hat{i}'\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{j}'\cos\theta\right)\cos\omega t +$$

$$x_c'\,\hat{j}' - y_c'\,\hat{i}' = 0$$

$$\theta = \omega t$$

$$\left(R \operatorname{sen}\omega t \cos\omega t - y_c'\right)\hat{i}' +$$

$$+\left(R \cos^2\omega t + x_c'\right)\hat{j}' = 0$$

$$\begin{cases} y_c' = R \operatorname{sen}\omega t \cos\omega t = \dfrac{R}{2} \operatorname{sen} 2\omega t \\ x_c' = -R\cos^2\omega t = -\dfrac{R}{2}\left(2\cos^2\omega t - 1 + 1\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_c' = \dfrac{R}{2} \operatorname{sen} 2\omega t \\ x_c' + \dfrac{R}{2} = -\dfrac{R}{2}\cos 2\omega t \end{cases}$$

La rulletta è una circonferenza di centro $\left(-\frac{R}{2}, 0\right)$ e raggio $\frac{R}{2}$