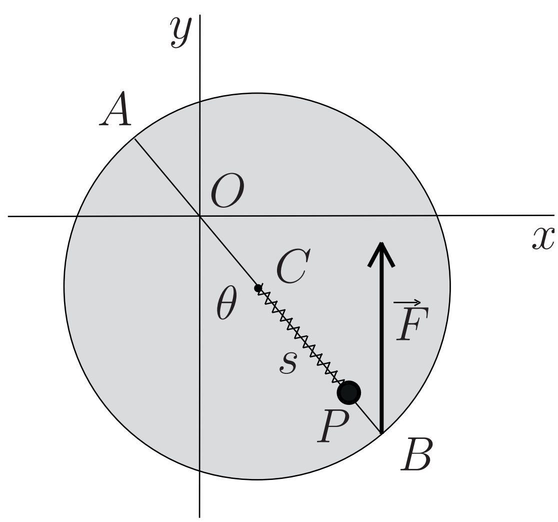
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2022/2023
Meccanica Razionale - Appello del 18/11/2023

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 18 novembre 2023

1. Un disco di centro C, raggio R e massa M è libero di ruotare attorno al suo punto interno O, sito a distanza $R/2$ dal centro. Il moto si svolge nel piano verticale $O(x, y)$. Un punto P di massa m scorre senza attrito lungo la scanalatura diametrale passante per O ed è collegato al centro C da una molla di costante elastica $k > 0$. Una forza costante $\mathbf{F} = F\,\widehat{\mathbf{i}}$ agisce sull'estremo diametrale B, il più lontano dal centro di sospensione. Si chiede di

   - determinare le configurazioni di equilibrio del sistema;
   - posto
   $$M = 2\,m; \quad m\,g = k\,R; \quad F = \frac{4}{3}\,k\,R$$
   riscrivere le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità.



Vettori posizione:

$$C-O = \frac{R}{2}(\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\theta - \hat{\jmath}\cos\theta)$$

$$P-O = \left(\frac{R}{2}+s\right)(\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\theta - \hat{\jmath}\cos\theta)$$

$$B-O = \frac{3}{2}R(\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\theta - \hat{\jmath}\cos\theta)$$

Energia potenziale:

$$V = Mg\,y_c + mg\,y_P + \frac{1}{2}ks^2 - F y_B =$$

$$= -Mg\frac{R}{2}\cos\theta - mg\left(\frac{R}{2}+s\right)\cos\theta +$$

$$+\frac{1}{2}ks^2 + F\frac{3}{2}R\cos\theta$$

Gradienti:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -mg\cos\vartheta + ks$$

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = Mg\frac{R}{2}\operatorname{sen}\vartheta + mg\left(\frac{R}{2}+s\right)\operatorname{sen}\vartheta +$$

$$-\frac{3}{2}FR\operatorname{sen}\vartheta$$

<u>Equazioni dell'equilibrio:</u>

$$\begin{cases} -mg\cos\vartheta + ks = 0 & (1) \\ \left(Mg\frac{R}{2} + mg\left(\frac{R}{2}+s\right) - \frac{3}{2}FR\right)\operatorname{sen}\vartheta = 0 & (2) \end{cases}$$

Dalla (2):

① $\operatorname{sen}\vartheta = 0$

② $Mg\frac{R}{2} + mg\left(\frac{R}{2}+s\right) - \frac{3}{2}FR = 0$

① $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pi$

Sostituendo nella (1):

$$\vartheta = 0 \Rightarrow ks = mg \qquad s = \frac{mg}{k}$$

$$\vartheta = \pi \Rightarrow ks = -mg \qquad s < 0$$

NON ACCETT.

$$Q_1 \equiv \left(0, \frac{mg}{k}\right)$$

② $$\frac{R}{2} + s = \frac{3}{2}\frac{FR}{mg} - \frac{M}{m}\frac{R}{2}$$

$$s = \frac{R}{2}\left\{\frac{3F}{mg} - \left(1 + \frac{M}{m}\right)\right\} \equiv s_2 = s_3$$

$$\cos\vartheta = \frac{kR}{2mg}\left\{\frac{3F}{mg} - \left(1 + \frac{M}{m}\right)\right\}$$

$\vartheta = \vartheta_2, \vartheta_3$

Ora operiamo le sostituzioni

dei parametri:

Con $mg = kR$ otteniamo

$$Q_1 = (0, R)$$

$$s_{2,3} = \frac{R}{2}\{4-3\} = \frac{R}{2}$$

Per $\theta_{2,3}$: $\cos\theta = \frac{ks}{mg} = \frac{1}{2}$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{3} \qquad \theta_3 = -\frac{\pi}{3}$$

$$Q_2 = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{R}{2}\right) \qquad Q_3 = \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{R}{2}\right)$$

Derivate seconde:

$$V_{ss} = k \qquad V_{s\theta} = mg \operatorname{sen}\theta$$

$$V_{\theta\theta} = \left(Mg\frac{R}{2} + mg\left(\frac{R}{2}+s\right) - \frac{3}{2}FR\right)\cos\theta$$

Sostituendo i parametri:

$$V_{ss} = k \qquad V_{s\vartheta} = kR \operatorname{sen}\vartheta$$

$$V_{\vartheta\vartheta} = \left(mgR + mg\left(\frac{R}{2}+s\right) - 2kR^2 \right)\cos\vartheta =$$

$$= kR\left(R + \frac{R}{2} + s - 2R\right)\cos\vartheta =$$

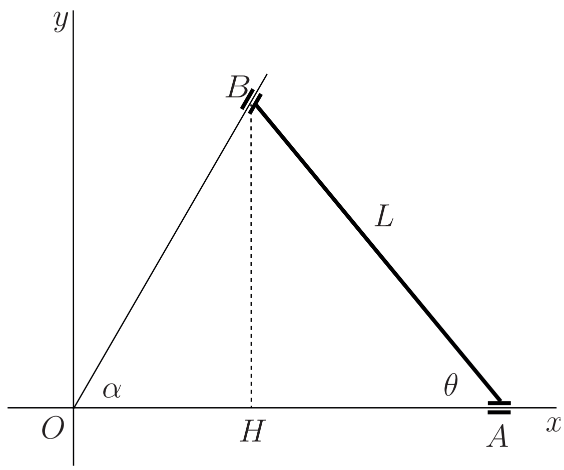
$$= kR\left(s - \frac{R}{2}\right)\cos\vartheta$$

$$H(Q_1) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{kR^2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{STABILE}$$

$$H(Q_2) = \begin{pmatrix} k & \frac{\sqrt{3}}{2}kR \\ \frac{\sqrt{3}}{2}kR & 0 \end{pmatrix} \quad \text{INSTABILE}$$

$$H(Q_3) = \begin{pmatrix} k & -\frac{\sqrt{3}}{2}kR \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}kR & 0 \end{pmatrix} \quad \text{INSTABILE}$$

2. Un'asta AB di lunghezza L si muove nel piano $O(x, y)$ con gli estremi vincolati a scorrere senza attrito su due guide che formano un angolo α tra di loro. Presa una delle guide come asse x, e indicato con θ l'angolo dell'asta con esso (vedi figura), scrivere le equazioni della base e della rulletta dell'asta.



$$C-O = x_c\,\hat{\imath} + y_c\,\hat{\jmath}$$

$$A-O = \left(\overline{BH}\cot\alpha + L\cos\theta\right)\hat{\imath}$$

$\overline{BH} = L\,\text{sen}\,\theta$, quindi

$$A-O = \left(L\,\text{sen}\theta\cot\alpha + L\cos\theta\right)\hat{\imath}$$

$$\vec{v}(A) = L\dot{\theta}\left(\cos\theta\cot\alpha - \text{sen}\,\theta\right)\hat{\imath}$$

$$0 = \vec{v}(A) + \vec{\omega}\times(C-A) =$$

$$= L\dot{\theta}\left(\cos\theta\cot\alpha - \text{sen}\,\theta\right)\hat{\imath} +$$

$$+ \left(-\dot{\theta}\,\hat{k}\right)\times\left[\left(x_c - L\,\text{sen}\theta\cot\alpha - L\cos\theta\right)\hat{\imath} +\right.$$

$$\left. + y_c\,\hat{\jmath}\right] =$$

$$= L\cancel{\dot\vartheta}\left(\cos\vartheta \cot\alpha - \operatorname{sen}\vartheta\right)\hat{\imath} +$$

$$+ \cancel{\dot\vartheta}\left[y_c \hat{\imath} - \left(x_c - L\operatorname{sen}\vartheta\cot\alpha - L\cos\vartheta\right)\hat{\jmath}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} L\left(\cos\vartheta\cot\alpha - \operatorname{sen}\vartheta\right) + y_c = 0 \\ x_c - L\operatorname{sen}\vartheta\cot\alpha - L\cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

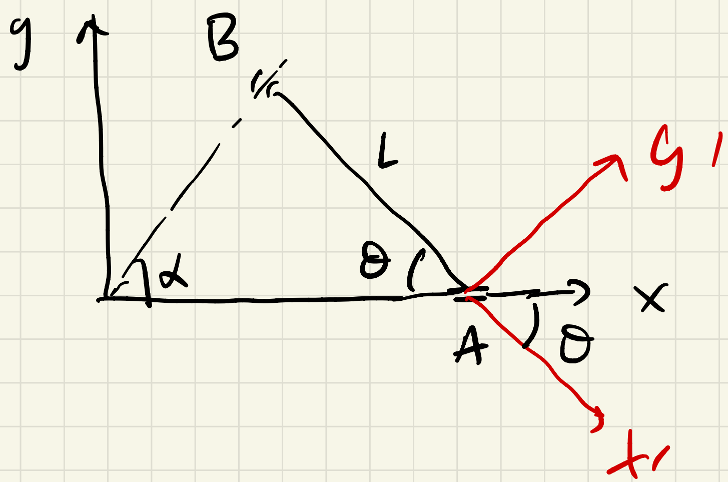
$$\begin{cases} y_c = \dfrac{L}{\operatorname{sen}\alpha}\left(\cos\vartheta\cos\alpha - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\alpha\right) \\ x_c = \dfrac{L}{\operatorname{sen}\alpha}\left(\operatorname{sen}\vartheta\cos\alpha + \cos\vartheta\operatorname{sen}\alpha\right) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{L}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}(\vartheta + \alpha) \\ y_c = \dfrac{L}{\operatorname{sen}\alpha}\cos(\vartheta + \alpha) \end{cases}$$

La base è quindi una circonferenza di raggio $\frac{L}{\operatorname{sen}\alpha}$ e centro l'origine

Per la rulletta scegliamo un sistema solidale con origine in A:



$$\begin{cases} \hat{i} = \hat{i}' \cos\vartheta + \hat{j}' \operatorname{sen}\vartheta \\ \hat{j} = -\hat{i}' \operatorname{sen}\vartheta + \hat{j}' \cos\vartheta \end{cases}$$

$$\vec{v}(A) = L\dot{\theta}(\cos\theta \cot\alpha - \operatorname{sen}\theta)\,\hat{i} =$$

$$= L\dot{\theta}(\cos\theta \cot\alpha - \operatorname{sen}\theta)(\hat{i}' \cos\vartheta + \hat{j}' \operatorname{sen}\vartheta)$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\vartheta}\,\hat{k}'$$

$$C - A = x_c'\,\hat{i}' + y_c'\,\hat{j}'$$

Quindi

$$0 =$$

$$= L\dot{\theta}(\cos\theta \cot\alpha - \operatorname{sen}\theta)(\hat{i}' \cos\vartheta + \hat{j}' \operatorname{sen}\vartheta) +$$

$$- \dot{\theta}\,\hat{k}' \times (x_c'\,\hat{i}' + y_c'\,\hat{j}') =$$

$$= L\cancel{\dot\theta}(\cos\vartheta \cot\alpha - \operatorname{sen}\theta)(\hat{i}' \cos\vartheta + \hat{j}' \operatorname{sen}\vartheta) +$$

$$+ \cancel{\dot\theta}(y_c' \hat{i}' - x_c' \hat{j}')$$

Da cui

$$\begin{cases} y_c' + L(\cos\vartheta \cot\alpha - \operatorname{sen}\vartheta)\cos\vartheta = 0 \\ x_c' - L(\cos\vartheta \cot\alpha - \operatorname{sen}\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_c' = \dfrac{L}{\operatorname{sen}\alpha}(\cos\vartheta \cos\alpha - \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\alpha)\operatorname{sen}\vartheta \\ y_c' = \dfrac{L}{\operatorname{sen}\alpha}(\cos\vartheta \cos\alpha - \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\alpha)\cos\vartheta \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_c' = \dfrac{L}{2\operatorname{sen}\alpha}\cos(\theta+\alpha)\operatorname{sen}\theta \\[2ex] y_c' = \dfrac{L}{2\operatorname{sen}\alpha}\cos(\theta+\alpha)\cos\theta \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_c' = \dfrac{L}{2\,2\operatorname{sen}\alpha}\left\{\operatorname{sen}(2\theta+\alpha)+\operatorname{sen}(-\alpha)\right\} \\[2ex] y_c' = \dfrac{L}{2\,2\operatorname{sen}\alpha}\left\{\cos(2\theta+\alpha)+\cos(-\alpha)\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_c' = \dfrac{L}{2\,2\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}(2\theta+\alpha) - \dfrac{L}{2} \\[2ex] y_c' = \dfrac{L}{2\,2\operatorname{sen}\alpha}\cos(2\theta+\alpha) + \dfrac{L}{2}\operatorname{ctg}\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_c' + \dfrac{L}{2} = \dfrac{L}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha}\,\mathrm{sen}(2\theta+\alpha) \\[2em] y_c' - \dfrac{L}{2}\cot\alpha = \dfrac{L}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha}\cos(2\theta+\alpha) \end{cases}$$

La rulletta è una circonferenza di centro $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\cot\alpha\right)$ e raggio $\dfrac{L}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha}$