# 1 Piccole Oscillazioni

Ci proponiamo di studiare il moto di un sistema olonomo conservativo ad $l$ gradi di libertà e vincoli fissi nelle vicinanze di una configurazione di equilibrio stabile. Sia $q \equiv (q_1, q_2, \ldots, q_l)$ il vettore con le $l$ coordinate lagrangiane che descrivono la varietà delle configurazioni e sia $q = \bar{q}$ la configurazione di equilibrio stabile. Se $V(q_1, q_2, \ldots, q_l) = V(q)$ è l'energia potenziale, allora $V(\bar{q})$ è un minimo per essa e quindi

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, l. \tag{1}$$

Inoltre, senza perdere in generalità, possiamo porre

$$V(\bar{q}) = 0, \tag{2}$$

in quanto l'energia potenziale è sempre definita a meno di una costante arbitraria. Siccome siamo interessati al moto del sistema quando le deviazioni delle coordinate lagrangiane dai loro valori di equilibrio sono piccole, sviluppiamo l'energia potenziale al second'ordine del polinomio di Taylor:

$$\begin{aligned} V(q) &= V(\bar{q}) + \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)_{\bar{q}} (q_k - \bar{q}_k) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{l} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_k\, q_j}\right)_{\bar{q}} (q_k - \bar{q}_k)(q_j - \bar{q}_j) + \mathcal{O}[(q - \bar{q})^2] \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{l} V_{kj}\, (q_k - \bar{q}_k)(q_j - \bar{q}_j) \end{aligned} \tag{3}$$

dove l'ultima uguaglianza è stata ottenuta in base alle (1) e (2), ed è stata introdotta la matrice reale simmetrica $\mathbf{V}$ data da

$$V_{kj} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_k\, q_j}\right)_{\bar{q}} \tag{4}$$

L'energia cinetica $T(q, \dot{q})$ per un tale sistema si può sempre scrivere nella forma

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{l} T_{kj}(q)\, \dot{q}_k\, \dot{q}_j \tag{5}$$

dove i coefficienti $T_{kj}(q)$ dipendono in generale dalle coordinate lagrangiane. Nelle vicinanze della configurazione di equilibrio, tuttavia, li approssimiamo secondo

$$T_{kj}(q) \approx T_{kj}(\bar{q})$$

e d'ora in poi li considereremo costanti e li indicheremo semplicemente con $T_{kj}$. Tali coefficienti formano una matrice reale simmetrica $\mathbf{T}$ che può anche essere definita da

$$T_{kj} = \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \, \dot{q}_j} \right)_{\bar{q}} . \tag{6}$$

Prima di scrivere la Lagrangiana, risulta conveniente introdurre un nuovo insieme di coordinate lagrangiane, come le differenze delle $q_k$ dai loro valori di equilibrio $\bar{q}_k$. Poniamo dunque

$$\eta_k = q_k - \bar{q}_k, \tag{7}$$

per cui si ha anche che $\dot{\eta}_k = \dot{q}_k$. Indichiamo inoltre con $\eta$ ed $\dot{\eta}$ i vettori $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l)$ ed $\dot{\eta} = (\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \ldots, \dot{\eta}_l)$. In questo modo, energia cinetica ed energia potenziale sono forme quadratiche nelle coordinate $\eta_k$ ed $\dot{\eta}_k$ e sono definite positive: l'energia cinetica per ragioni fisiche e l'energia potenziale perchè la stiamo valutando nelle vicinanze di un punto di minimo.

Possiamo dunque scrivere la Lagrangiana $\mathcal{L} = T - V$ nella forma

$$\mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2} \, \dot{\eta} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\eta} - \frac{1}{2} \, \eta \cdot \mathbf{V} \cdot \eta = \frac{1}{2} \sum_{k',j=1}^{l} T_{k'j} \dot{\eta}_{k'} \, \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \sum_{k',j=1}^{l} V_{k'j} \eta_{k'} \, \eta_j. \tag{8}$$

Le derivate della Lagrangiana sono

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2} \sum_{k'=1}^{l} T_{k'k} \, \dot{\eta}_{k'} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} T_{kj} \, \dot{\eta}_j = \sum_{j=1}^{l} T_{kj} \, \dot{\eta}_j = \mathbf{T} \cdot \dot{\eta} \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2} \sum_{k'=1}^{l} V_{k'k} \, \eta_{k'} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} V_{kj} \, \eta_j = -\sum_{j=1}^{l} V_{kj} \, \eta_j = -\mathbf{V} \cdot \eta, \tag{10}$$

dove abbiamo sfruttato la simmetria delle matrici $\mathbf{T}$ e $\mathbf{V}$. Le equazioni di Lagrange si scrivono allora

$$\sum_{j=1}^{l} \left( T_{kj} \, \ddot{\eta}_j + V_{kj} \, \eta_j \right) = 0, \tag{11}$$

e costituiscono un sistema lineare omogeneo di $l$ equazioni differenziali del second'ordine per le incognite $\eta_k(t)$. Come di consueto nello studio dei sistemi lineari, cerchiamo la soluzione in forma esponenziale:

$$\eta_k(t) = a_k \, e^{i \, \omega \, t}. \tag{12}$$

Sostituendo nella (11) otteniamo

$$\sum_{j=1}^{l} \left( V_{kj} - \omega^2 T_{kj} \right) \, a_j = 0, \tag{13}$$

che è un sistema lineare algebrico omogeneo per le incognite $a_k$, $k = 1, 2, \ldots, l$. Introducendo il vettore $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_l)$, la (13) si può scrivere in forma matriciale

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{a} = \lambda\, \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}, \tag{14}$$

con $\lambda = \omega^2$. La (14) è molto simile ad un problema agli autovalori: l'azione della matrice $\mathbf{V}$ sul vettore $\mathbf{a}$ è di fornire un multiplo dell'applicazione della matrice $\mathbf{T}$ su $\mathbf{a}$. Chiameremo dunque autovalori i valori di $\lambda$ per cui questo succede ed autovettori i corrispondenti vettori non nulli. Gli autovalori si determinano come al solito risolvendo l'equazione caratteristica

$$|\mathbf{V} - \lambda \mathbf{T}| = 0, \tag{15}$$

che è la condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema omogeneo (13) ammetta soluzioni non nulle. Gli autovalori sono in numero di $l$ (se contati con la propria molteplicità) e li indichiamo con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$. Vale allora il seguente teorema:

*Gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ del problema (14) sono reali e positivi. Gli autovettori corrispondenti sono inoltre ortogonali, secondo una relazione di ortogonalità opportunamente definita.*

Per dimostrarlo, consideriamo l'equazione (14) per l'autovalore $\lambda_k$ assieme all'aggiunta dell'equazione per l'autovalore $\lambda_j$, che supponiamo distinto da $\lambda_k$:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \mathbf{a}^{(\mathbf{k})} &= \lambda_k\, \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^{(\mathbf{k})} \\ \mathbf{a}^{(\mathbf{j})\,\dagger} \cdot \mathbf{V} &= \lambda_j^*\, \mathbf{a}^{(\mathbf{j})\,\dagger} \cdot \mathbf{T} \end{aligned}$$

Moltiplichiamo ora scalarmente la prima equazione da sinistra per $\mathbf{a}^{(\mathbf{j})\,\dagger}$ e la seconda da destra per $\mathbf{a}^{(\mathbf{k})}$ e poi sottraiamole membro a membro:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(\mathbf{j})\,\dagger} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{a}^{(\mathbf{k})} &= \lambda_k\, \mathbf{a}^{(\mathbf{j})\,\dagger} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^{(\mathbf{k})} \\ \mathbf{a}^{(\mathbf{j})\,\dagger} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{a}^{(\mathbf{k})} &= \lambda_j^*\, \mathbf{a}^{(\mathbf{j})\,\dagger} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^{(\mathbf{k})} \\ 0 &= (\lambda_k - \lambda_j^*)\, \mathbf{a}^{(\mathbf{j})\,\dagger} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^{(\mathbf{k})} \end{aligned} \tag{16}$$

Nel caso $j = k$, l'elemento di matrice $\mathbf{a}^{(\mathbf{j})\,\dagger} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^{(\mathbf{k})}$ è positivo, in quanto $\mathbf{T}$ è definita positiva; deve quindi essere $\lambda_k = \lambda_k^*$, il che dimostra che gli autovalori sono reali. Per $j \neq k$, invece, deve essere $\mathbf{a}^{(\mathbf{k})\,\dagger} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^{(\mathbf{k})} = 0$, che fornisce una relazione di ortogonalità rispetto ad un prodotto scalare definito mediante la matrice $\mathbf{T}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$. La positività degli autovalori segue dalla (16) per $j = k$:

$$\lambda_k = \frac{\mathbf{a}^{(\mathbf{k})\,\dagger} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{a}^{(\mathbf{k})}}{\mathbf{a}^{(\mathbf{k})\,\dagger} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^{(\mathbf{k})}} > 0,$$

in quanto $\mathbf{V}$ e $\mathbf{T}$ sono definite positive. Questo garantisce che la grandezza $\omega$ che abbiamo introdotto nella (12) ha il significato di una frequenza.

La soluzione generale delle equazioni del moto (11) è pertanto una combinazione lineare delle soluzioni particolari corrispondenti a ciascun autovalore. Notiamo però che ad ogni autovalore $\lambda_k$ corrispondono due frequenze, $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$ e $-\omega_k = -\sqrt{\lambda_k}$. La soluzione generale si può scrivere pertanto:

$$\eta_k(t) = \sum_{j=1}^{l} B_j a_k^{(j)} \left( e^{i\,\omega_j\,t} + e^{-i\,\omega_j\,t} \right) = \sum_{j=1}^{l} C_j a_k^{(j)} \cos \omega_j\,t \tag{17}$$

ovvero, in termini matriciali,

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^{l} C_j \mathbf{a}^{(\mathbf{j})} \cos \omega_j\,t. \tag{18}$$