Universita' degli Studi di Ancona

Esercizi di Meccanica Razionale - Parte I

1. E' dato il campo di forze $\mathbf{F}(x,y,z) = (ax+by+cz)\hat{\mathbf{i}} + (dx+ey+fz)\hat{\mathbf{j}} + (gx+hy+qz)\hat{\mathbf{k}}$ definito in $\mathbf{R}^3$, con a,b, c, d, e, f, g, h e q parametri reali. Per quali valori di a,b, c e d il moto generato da questo campo e' centrale?

   $\boxed{1}$ $a = c = e = f = g = h = 0$, $b = d = q$ qualsiasi.
   $\boxed{2}$ $b = c = d = f = g = h = 0$, $a = e = q$ qualsiasi.
   $\boxed{3}$ $b = c = d = e = f = q = 0$, $a = g = h$ qualsiasi.
   $\boxed{4}$ $b = c = d = f = g = q = 0$, $a = e = h$ qualsiasi.

2. E' dato il campo di forze $\mathbf{F}(x,y,z) = (ax+bx^2)\hat{\mathbf{i}} + (cy+dy^2)\hat{\mathbf{j}} + (ez+fz^2)\hat{\mathbf{k}}$ definito in $\mathbf{R}^3$, con a,b, c, d, e ed f parametri reali. Per quali valori di a,b, c, d, e ed f il moto generato da questo campo e' centrale?

   $\boxed{1}$ $b = c = f = 0$, $a = d = e$ qualsiasi.
   $\boxed{2}$ $b = d = e = 0$, $a = c = f$ qualsiasi.
   $\boxed{3}$ $b = d = f = 0$, $a = c = e$ qualsiasi.
   $\boxed{4}$ $a = d = f = 0$, $b = c = e$ qualsiasi.

3. E' dato il campo di forze $\mathbf{F}(x,y,z) = (ax+b)\hat{\mathbf{i}} + (cy+d)\hat{\mathbf{j}} + (ez+f)\hat{\mathbf{k}}$ definito in $\mathbf{R}^3$, con a,b, c, d, e ed f parametri reali. Per quali valori di a,b, c, d, e ed f il moto generato da questo campo e' centrale?

   $\boxed{1}$ $b = c = f = 0$, $a = d = e$ qualsiasi.
   $\boxed{2}$ $b = d = e = 0$, $a = c = f$ qualsiasi.
   $\boxed{3}$ $b = d = f = 0$, $a = c = e$ qualsiasi.
   $\boxed{4}$ $a = d = f = 0$, $b = c = e$ qualsiasi.

4. E' dato il campo di forze

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x}{ay+b}\hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{cy+d}\hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{ey+f}\hat{\mathbf{j}}$$

   definito in $\mathbf{R}^3$, con a,b, c, d, e ed f parametri reali. Per quali valori di a,b, c, d, e ed f il moto generato da questo campo e' centrale?

   $\boxed{1}$ $a = c = e = 0$, $b = d = f$ qualsiasi.
   $\boxed{2}$ $a = c = f = 0$, $b = d = e$ qualsiasi.
   $\boxed{3}$ $a = d = e = 0$, $b = c = f$ qualsiasi.
   $\boxed{4}$ $b = c = e = 0$, $a = d = f$ qualsiasi.

5. E' dato il campo di forze $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + ay)\hat{\mathbf{i}} + (y - bz)\hat{\mathbf{j}} + (z + y)\hat{\mathbf{k}}$ definito in $\mathbf{R^3}$, con a e b parametri reali. Per quali valori di a e b questo campo e' conservativo?

   $\boxed{1}$ $a = 1,\ b = 1.$
   $\boxed{2}$ $a = 0,\ b = 0.$
   $\boxed{3}$ $a = 1,\ b = 0.$
   $\boxed{4}$ $a = 0,\ b = -1.$

6. E' dato il campo di forze

$$\mathbf{F}(x, y, z) = aF_0 \frac{hy\hat{\mathbf{i}} - x\hat{\mathbf{j}}}{x^2 + h^2y^2}$$

   definito in $\mathbf{R^3}$, con a, h ed F_0 parametri reali con $a \neq 0$ ed $F_0 \neq 0$. Per quali valori di a, h ed F_0 questo campo e' conservativo?

   $\boxed{1}$ Nessun valore di a, h ed F_0.
   $\boxed{2}$ Qualsiasi valore di a, h ed F_0.
   $\boxed{3}$ Qualsiasi valore di a ed F_0, con $h = 1$.
   $\boxed{4}$ Qualsiasi valore di a ed F_0, con $h = -1$.

7. E' dato il campo di forze $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1\hat{\mathbf{i}} + F_2\hat{\mathbf{j}} + g(x, y, z)\hat{\mathbf{k}}$ definito in $\mathbf{R^3}$, con F_1 ed F_2 parametri reali non nulli e g una funzione derivabile due volte ovunque. Per quale funzione g questo campo e' conservativo?

   $\boxed{1}$ $g = g(x, y).$
   $\boxed{2}$ $g = g(z).$
   $\boxed{3}$ Qualunque g, purche' $F_1 = F_2$.
   $\boxed{4}$ Nessuna funzione g.

8. E' dato il campo di forze

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_0 \frac{\mathbf{h} \times \mathbf{r}}{a}$$

   definito in $\mathbf{R^3}$, con $\mathbf{h}$ un vettore costante non nullo ed a ed F_0 parametri reali non nulli. Per quale vettore $\mathbf{h}$ questo campo e' conservativo?

   $\boxed{1}$ $\mathbf{h}$ parallelo a $\hat{\mathbf{j}}$.
   $\boxed{2}$ $\mathbf{h}$ parallelo ad $\hat{\mathbf{i}}$.
   $\boxed{3}$ Nessun vettore $\mathbf{h}$.
   $\boxed{4}$ Per qualunque vettore $\mathbf{h}$.

9. Un punto materiale P di massa m si muove in un campo di forze conservativo la cui energia potenziale e' data da $V(x, y, z) = (1/2)k(x^2 + y^2 + z^2)$ definito nel dominio $D = \mathbf{R}^3$. Date le condizioni iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$, in quale di queste regioni di spazio si svolge il moto del punto P?

   $\boxed{1}$ La sfera di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$.

$\boxed{2}$ Il semispazio $z > 0$.
$\boxed{3}$ La regione esterna alla sfera di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$.
$\boxed{4}$ Il semispazio $z < 0$.

10. Un punto materiale P di massa m si muove in un campo di forze conservativo la cui energia potenziale e' data da $V(x, y, z) = -\alpha/r$ definito nel dominio $D = \mathbf{R}^3/\{O\}$ e dove r e' la coordinata radiale in un sistema di coordinate polari sferiche. Date le condizioni iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = z(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$, in quale di queste regioni di spazio si svolge il moto del punto P?

$\boxed{1}$ Per ogni $r \leq 1$.
$\boxed{2}$ Per ogni $r > 0$.
$\boxed{3}$ Per ogni $r \leq \alpha$.
$\boxed{4}$ Solo per $y = z = 0$, x qualsiasi.

11. Un punto materiale P di massa m si muove in un campo di forze conservativo la cui energia potenziale e' data da $V(x, y, z) = A \sin x$, con $A > 0$, definito nel dominio $D = \{P \equiv (x, y, z), 0 \leq x < 2\pi, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty\}$. Date le condizioni iniziali $x(0) = x_0 = 3\pi/2$, $y(0) = z(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$, in quale di queste regioni di spazio si svolge il moto del punto P?

$\boxed{1}$ $x = \pi$, y e z qualsiasi.
$\boxed{2}$ $x = x_0$, $y = z = 0$.
$\boxed{3}$ $x = y = z = 0$.
$\boxed{4}$ $x = x_0$, y e z qualsiasi.

12. Un punto materiale P di massa m si muove nel campo di forze dato da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{a}(\frac{r}{\lambda} - 1)e^{-r/\lambda}\hat{\mathbf{e}}_r,$$

dove $\hat{\mathbf{e}}_r$ e' il versore radiale ed a e λ sono costanti reali positive. Supposto che all'istante iniziale $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$, quale di queste regioni dello spazio e' la superficie di energia massima?

$\boxed{1}$ La sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2$.
$\boxed{2}$ Il piano di equazione $x = y$.
$\boxed{3}$ La superficie di equazione $x = \exp(-y/\lambda)$.
$\boxed{4}$ La superficie di equazione $y = \exp(-x/\lambda)$.

13. Un punto materiale P di massa m si muove nel campo di forze $\mathbf{F}(x, y, z) = x(y - \alpha)\hat{\mathbf{i}} - y(x - \alpha)\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ definito nel dominio $D = \mathbf{R}^3$ e dove α e' un parametro reale. Per quali valori di α si conserva la componente della quantita' di moto lungo la direzione della retta bisettrice del I e III quadrante del piano (x, y) ?

$\boxed{1}$ $\alpha = 1$.
$\boxed{2}$ $\alpha = 0$.
$\boxed{3}$ Nessun valore di α.
$\boxed{4}$ Qualsiasi valore di α.

14. Un punto materiale P di massa m si muove nel campo di forze $\mathbf{F}(x, y, z) = (x+y)\hat{\mathbf{i}} + (x+y+bxy)\hat{\mathbf{j}} + g(x, y, z)\hat{\mathbf{k}}$ definito nel dominio $D = \mathbf{R}^3$ e dove b e' un parametro reale e g una funzione reale derivabile. Per quali valori di b e quali funzioni g si conserva la componente della quantita' di moto lungo la direzione della retta bisettrice del II e IV quadrante del piano (x, y) ?

$\boxed{1}$ b qualsiasi e $g = g(x, y)$.
$\boxed{2}$ $b = 1$ e g costante.
$\boxed{3}$ b qualsiasi e $g = g(z)$.
$\boxed{4}$ $b = 0$ e g qualsiasi.

15. Un punto materiale P di massa m si muove nel campo di forze $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2)(\hat{\mathbf{i}} + h\hat{\mathbf{j}}) - (x^2 + y^2 + bxy)\hat{\mathbf{k}}$ definito nel dominio $D = \mathbf{R}^3$ e dove b ed h sono parametri reali. Per quali valori di b ed h si conserva la componente della quantita' di moto lungo la direzione della retta bisettrice del I e III quadrante del piano (x, z) ?

$\boxed{1}$ $b = 0$ ed $h = 0$.
$\boxed{2}$ $b = 0$ ed h qualsiasi.
$\boxed{3}$ b qualsiasi ed $h = 0$.
$\boxed{4}$ b ed h qualsiasi.

16. Un punto materiale P di massa m si muove nel campo di forze $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2)(\hat{\mathbf{i}} - h\hat{\mathbf{j}}) + (x^2 + y^2 - bxy)\hat{\mathbf{k}}$ definito nel dominio $D = \mathbf{R}^3$ e dove b ed h sono parametri reali. Per quali valori di b ed h si conserva la componente della quantita' di moto lungo la direzione della retta bisettrice del II e IV quadrante del piano (x, z) ?

$\boxed{1}$ b qualsiasi ed $h = 0$.
$\boxed{2}$ $b = 0$ ed $h = 0$.
$\boxed{3}$ $b = 0$ ed h qualsiasi.
$\boxed{4}$ b ed h qualsiasi.

17. Un punto materiale P di massa m si muove nel campo di forze $\mathbf{F}(x, y, z) = h(x)\hat{\mathbf{i}} + g(y)\hat{\mathbf{j}} + f(z)\hat{\mathbf{k}}$ definito nel dominio $D = \mathbf{R}^3$ e dove h, g ed f sono funzioni reali derivabili non identicamente nulle. Quali relazione deve sussistere tra le funzioni h, g ed f affinche' si conservi la componente x del momento angolare?

$\boxed{1}$ h qualsiasi con g ed f costanti.
$\boxed{2}$ Qualsiasi g, h ed f.
$\boxed{3}$ Nessuna funzione g, h ed f.
$\boxed{4}$ $g/f = y/z$.

18. Un punto materiale P di massa m si muove nel campo di forze $\mathbf{F}(x, y, z) = h(x)\hat{\mathbf{i}} + g(y)\hat{\mathbf{j}} + f(z)\hat{\mathbf{k}}$ definito nel dominio $D = \mathbf{R}^3$ e dove h, g ed f sono funzioni reali derivabili non identicamente nulle. Quali relazione deve sussistere tra le funzioni h, g ed f affinche' si conservi la componente y del momento angolare?

$\boxed{1}$ Qualsiasi g, h ed f.

$\boxed{2}$ $h/f = x/z$.
$\boxed{3}$ Nessuna funzione g, h ed f.
$\boxed{4}$ g qualsiasi con h ed f costanti.

19. Un punto materiale P di massa m si muove nel campo di forze $\mathbf{F}(x,y,z) = h(x)\hat{\mathbf{i}} + g(y)\hat{\mathbf{j}} + f(z)\hat{\mathbf{k}}$ definito nel dominio $D = \mathbf{R}^3$ e dove h, g ed f sono funzioni reali derivabili non identicamente nulle. Quali relazione deve sussistere tra le funzioni h, g ed f affinche' si conservi la componente z del momento angolare?

$\boxed{1}$ Nessuna funzione g, h ed f.
$\boxed{2}$ Qualsiasi g, h ed f.
$\boxed{3}$ $h/g = x/y$.
$\boxed{4}$ f qualsiasi con h e g costanti.

20. Un punto materiale P di massa m si muove nel campo di forze $\mathbf{F}(x,y,z) = h(x)\hat{\mathbf{i}} + g(y)\hat{\mathbf{j}} + f(z)\hat{\mathbf{k}}$ definito nel dominio $D = \mathbf{R}^3$ e dove h, g ed f sono funzioni reali derivabili non identicamente nulle. Quali relazione deve sussistere tra le funzioni h, g ed f affinche' si conservi il momento angolare?

$\boxed{1}$ Qualsiasi g, h ed f.
$\boxed{2}$ $g/f = y/z$ e $h/f = x/z$.
$\boxed{3}$ Nessuna funzione g, h ed f.
$\boxed{4}$ f, h e g costanti.

21. Un punto materiale P di massa m si muove sotto l'azione della forza viscosa $\mathbf{F}(x,y,z) = -\lambda v_x\hat{\mathbf{i}}$ con condizione iniziale $\mathbf{v}(0) = v_{0x}\hat{\mathbf{i}} + v_{0y}\hat{\mathbf{j}} + v_{0z}\hat{\mathbf{k}}$ con v_{0x}, v_{0y} e v_{0z} tutte diverse da zero. L'andamento delle velocita' nel tempo e' tale che:

$\boxed{1}$ v_x si annulla in un tempo finito con v_y e v_z costanti.
$\boxed{2}$ Tutte le componenti della velocita' decadono esponenzialmente nel tempo.
$\boxed{3}$ Tutte le componenti della velocita' rimangono costanti nel tempo.
$\boxed{4}$ v_x decade esponenzialmente nel tempo con v_y e v_z costanti.

22. Un punto materiale P di massa m si muove sotto l'azione della forza dipendente dal tempo $\mathbf{F}(x,y,z) = -bt\hat{\mathbf{i}}$ con condizione iniziale $\mathbf{r}(0) = 0$ e $\mathbf{v}(0) = v_0\hat{\mathbf{i}}$. I tempi t_1 e t_2 in cui il punto P inverte il suo moto e ripassa per l'origine sono, rispettivamente:

$\boxed{1}$ nessun tempo t_1 e $t_2 = \sqrt{6mv_0/b}$.
$\boxed{2}$ nessun tempo t_1 e t_2.
$\boxed{3}$ $t_1 = \sqrt{2mv_0/b}$ e $t_2 = \sqrt{6mv_0/b}$.
$\boxed{4}$ $t_1 = \sqrt{2mv_0/b}$ e nessun tempo t_2.

23. Un punto materiale P di massa m si muove sotto l'azione della forza dipendente dal tempo $\mathbf{F}(x,y,z) = -F_0\exp(-\Omega t)\hat{\mathbf{j}}$ con condizione iniziale $\mathbf{r}(0) = 0$ e $\mathbf{v}(0) = v_0\hat{\mathbf{j}}$. Per tempi $t >> \Omega$, cioe' tali che $\exp(-\Omega t)$ sia trascurabile,

$\boxed{1}$ il punto P si muove di moto rettilineo uniforme.
$\boxed{2}$ la velocita' di P tende a zero esponenzialmente nel tempo.

$\boxed{3}$ la velocita' di P cresce esponenzialmente nel tempo.
$\boxed{4}$ la coordinata y di P cresce esponenzialmente nel tempo.

24. Un punto materiale P di massa m si muove nello spazio sotto l'azione della forza dipendente dal tempo $\mathbf{F}(x,y,z) = -mg\hat{\mathbf{k}} + A\cos\omega t\hat{\mathbf{i}}$ con condizione iniziale $\mathbf{r}(0) = 0$ e $\mathbf{v}(0) = v_0\hat{\mathbf{k}}$. Per quale valore di v_0 il vettore velocita' si annulla per qualche tempo $t_1 > 0$?

$\boxed{1}$ $v_0 = g\pi/(2\omega)$.
$\boxed{2}$ $v_0 = g\pi/\omega$.
$\boxed{3}$ Nessun valore di v_0.
$\boxed{4}$ Qualsiasi valore di v_0.

25. E' data nel piano la curva spirale

$$\rho = e^{k\theta}$$

con ρ e θ coordinate polari piane. Il versore tangente $\hat{\mathbf{t}}$ e' dato da:

$\boxed{1}$ $\hat{\mathbf{t}} = [(k\cos\theta - \sin\theta)\hat{\mathbf{i}} + (k\sin\theta + \cos\theta)\hat{\mathbf{j}}]/\sqrt{k^2+1}$.
$\boxed{2}$ $\hat{\mathbf{t}} = [(k\cos\theta + \sin\theta)\hat{\mathbf{i}} + (k\sin\theta - \cos\theta)\hat{\mathbf{j}}]/\sqrt{k^2+1}$.
$\boxed{3}$ $\hat{\mathbf{t}} = [(k\cos\theta + \sin\theta)\hat{\mathbf{i}} + (k\sin\theta + \cos\theta)\hat{\mathbf{j}}]/\sqrt{k^2+1}$.
$\boxed{4}$ $\hat{\mathbf{t}} = [(k\cos\theta - \sin\theta)\hat{\mathbf{i}} + (k\sin\theta - \cos\theta)\hat{\mathbf{j}}]/\sqrt{k^2+1}$.

26. E' data nel piano la curva spirale

$$\rho = e^{-k\theta}$$

con ρ e θ coordinate polari piane. Il versore tangente $\hat{\mathbf{t}}$ e' dato da:

$\boxed{1}$ $\hat{\mathbf{t}} = [-(k\cos\theta - \sin\theta)\hat{\mathbf{i}} + (-k\sin\theta + \cos\theta)\hat{\mathbf{j}}]/\sqrt{k^2+1}$.
$\boxed{2}$ $\hat{\mathbf{t}} = [-(k\cos\theta + \sin\theta)\hat{\mathbf{i}} + (-k\sin\theta + \cos\theta)\hat{\mathbf{j}}]/\sqrt{k^2+1}$.
$\boxed{3}$ $\hat{\mathbf{t}} = [-(k\cos\theta - \sin\theta)\hat{\mathbf{i}} + (-k\sin\theta - \cos\theta)\hat{\mathbf{j}}]/\sqrt{k^2+1}$.
$\boxed{4}$ $\hat{\mathbf{t}} = [-(k\cos\theta - \sin\theta)\hat{\mathbf{i}} + (-k\sin\theta - \cos\theta)\hat{\mathbf{j}}]/\sqrt{k^2+1}$.

27. E' data nel piano cartesiano (x, y) la curva

$$x = a\theta + R\cos\theta$$
$$y = R\sin\theta$$

che rappresenta una cicloide con a ed R reali positivi. Il versore tangente $\hat{\mathbf{t}}$ e' dato da:

$\boxed{1}$ $\hat{\mathbf{t}} = [R\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + (a - R\cos\theta)\hat{\mathbf{j}}]/\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\sin\theta}$.
$\boxed{2}$ $\hat{\mathbf{t}} = [(a - R\sin\theta)\hat{\mathbf{i}} + R\cos\theta\hat{\mathbf{j}}]/\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\sin\theta}$.
$\boxed{3}$ $\hat{\mathbf{t}} = [R\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + (a - R\cos\theta)\hat{\mathbf{j}}]/\sqrt{a^2 + R^2 + 2aR\sin\theta}$.
$\boxed{4}$ $\hat{\mathbf{t}} = [(a - R\sin\theta)\hat{\mathbf{i}} + R\cos\theta\hat{\mathbf{j}}]/\sqrt{a^2 + R^2 + 2aR\sin\theta}$.

28. E' data nel piano cartesiano (x, y) la curva

$$x = R\cos\theta$$
$$y = b\theta + R\sin\theta$$

che rappresenta una cicloide con a ed R reali positivi. Il versore tangente $\hat{\mathbf{t}}$ e' dato da:

$\boxed{1}$ $\hat{\mathbf{t}} = [-R\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + (b + R\cos\theta)\hat{\mathbf{j}}]/\sqrt{b^2 + R^2 - 2bR\sin\theta}$.
$\boxed{2}$ $\hat{\mathbf{t}} = [(b - R\sin\theta)\hat{\mathbf{i}} + R\cos\theta\hat{\mathbf{j}}]/\sqrt{b^2 + R^2 + 2bR\sin\theta}$.
$\boxed{3}$ $\hat{\mathbf{t}} = [(b - R\sin\theta)\hat{\mathbf{i}} + R\cos\theta\hat{\mathbf{j}}]/\sqrt{b^2 + R^2 - 2bR\sin\theta}$.
$\boxed{4}$ $\hat{\mathbf{t}} = [-R\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + (b + R\cos\theta)\hat{\mathbf{j}}]/\sqrt{b^2 + R^2 + 2bR\sin\theta}$.

29. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti affinche' un campo di forze $\mathbf{F}(x, y, z)$ definito in un dominio $D \in \mathbf{R^3}$ sia conservativo.

30. Definire il piano osculatore di una curva γ in un suo punto P.

31. E' dato un campo di forze $\mathbf{F}(x, y, z)$ definito in $\mathbf{R^3}$ ed una retta r. Enunciare e giustificare le condizioni sotto le quali la componente della quantita' di moto di un punto P di massa m lungo la retta r e' costante.

32. E' dato un campo di forze $\mathbf{F}(x, y, z)$ definito in $\mathbf{R^3}$ ed una retta r. Enunciare e giustificare le condizioni sotto le quali la componente del momento angolare di un punto P di massa m lungo la retta r e' costante.