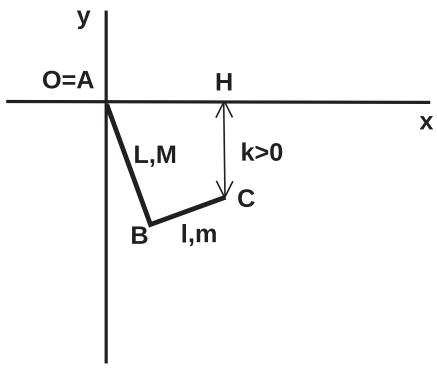
Universita' degli Studi di Ancona

Esercizi di Meccanica Razionale - Parte III

1. Un sistema rigido è costituito da due aste AB e BC, di lunghezza rispettivamente L ed l e di masse M ed m, saldate ad angolo retto nell'estremo comune B. Il sistema è libero di ruotare nel piano verticale $O(x, y)$ attorno al punto A che è fisso e che coincide con l'origine (vedi figura). Una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto C con la sua proiezione H sull'asse x. Scrivere le equazioni del moto utilizzando le Equazioni Cardinali della Dinamica. Determinare quindi la reazione vincolare nella configurazione in cui l'asta AB è disposta lungo l'asse y, con l'estremo B in basso, supponendo che le condizioni iniziali corrispondano alla configurazione con l'asta disposta lungo l'asse x con B a destra di A e velocità nulla.



2. È dato nello spazio il sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O(x, y, z)$ con l'asse z verticale ascendente. Un punto materiale P di massa m scorre senza attrito su una guida circolare verticale di centro O e raggio R, priva di massa e che ruota, a sua volta, attorno all'asse z con velocità angolare costante ω. Determinare il numero di gradi di libertà del sistema e scrivere le equazioni del moto utilizzando le equazione di Lagrange.

3. È dato il campo di forze $\mathbf{F} = x\hat{\mathbf{j}} - y\hat{\mathbf{i}}$. È un campo conservativo? È un campo centrale? Fornire una dimostrazione della risposta.

4. Il sistema materiale in figura è costituito da un'asta AB di massa m e lunghezza $2L$ e da un punto materiale P di massa M. Il sistema si muove su un piano verticale, nel quale è stato introdotto il sistema di riferimento cartesiano $O(x, z)$, con z vericale ascendente. Il punto P scorre senza attrito sull'asse z, mentre l'asta è libera di ruotare attorno al suo estremo A che è fisso e che coincide con l'origine degli assi. Infine, una molla di costante elastica $k > 0$ collega l'estremo B dell'asta con il punto P. Si chiede:

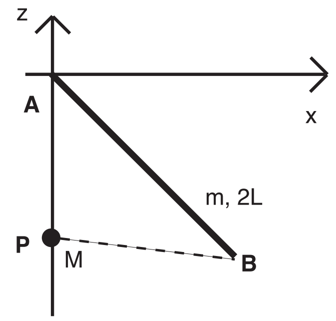
   (a) Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane opportune;

   (b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

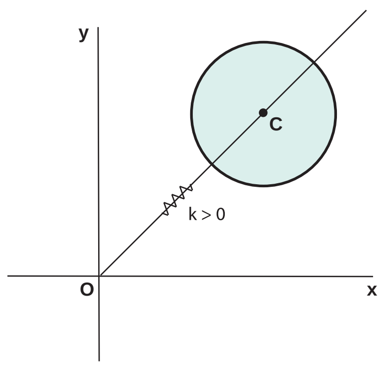
(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(d) scrivere le equazioni di Lagrange;

(e) studiare tutti i possibili moti nei quali l'angolo formato dall'asta con la verticale è costante.



5. Un cerchio di raggio R e massa m si muove nel piano orizzontale $O(x, y)$. Il centro del cerchio, C, è vincolato a scorrere senza attrito su una guida rettilinea passante per l'origine O e che ruota attorno ad O con velocità angolare costante ω (il cerchio è rigido rispetto alla guida). Una molla di costante elastica $k > 0$ unisce inoltre il centro C con l'origine O. Dopo aver calcolato l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema, scrivere e risolvere le equazioni di Lagrange. Si supponga che all'istante $t = 0$ la guida sia disposta lungo l'asse x. Infine, calcolare la reazione vincolare nel

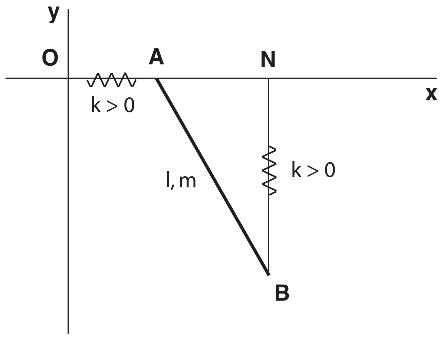


punto C.

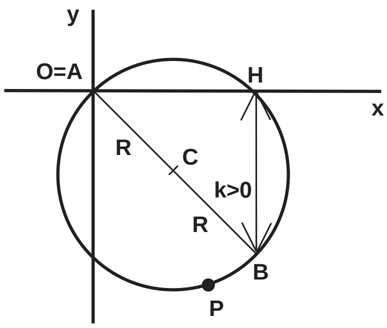
6. Un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza l è vincolata a ruotare nel piano verticale $O(x, y)$ attorno all'estremo A che, a sua volta, è libero di scorrere senza attrito sull'asse x. Due molle di ugual costante elastica $k > 0$ collegano l'estremo A con l'origine O e l'estremo B e con il punto N, proiezione di B sull'asse x (vedi figura). Posto
$$\lambda = \frac{mg}{kl},$$
si chiede di

- determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità al variare del parametro λ;

- determinare le reazioni vincolari nelle configurazioni di equilibrio;
- determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile nel caso particolare $\lambda = 1$.



7. Un sistema rigido è costituito da un contorno circolare di diametro $2R$, centro C e massa $M/2$ e da un'asta diametrale AB, pure di massa $M/2$. Il sistema è libero di ruotare nel piano verticale $O(x, y)$ attorno al punto A che è fisso e che coincide con l'origine (vedi figura). Una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto B con la sua proiezione H sull'asse x. Inoltre, un punto materiale P, di massa m, è vincolato a scorrere senza attrito sul contorno circolare. Si chiede di:



   - determinare il numero di gradi di libertà del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;
   - scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema;
   - scrivere le equazioni del moto utilizzando le equazioni di Lagrange.

8. Il sistema materiale in figura è costituito da un'asta AB di massa M e lunghezza $2L$ e da un punto materiale P di massa m, libero di scorrere senza attrito lungo l'asta. Il sistema si muove su un piano verticale, nel quale è stato introdotto il sistema di riferimento cartesiano $O(x, z)$, con z vericale ascendente. L'asta è libera di ruotare attorno al suo estremo A che è fisso e che coincide con l'origine degli assi. Infine, una molla di costante elastica $k > 0$ collega l'estremo A dell'asta con il punto P. Si chiede:

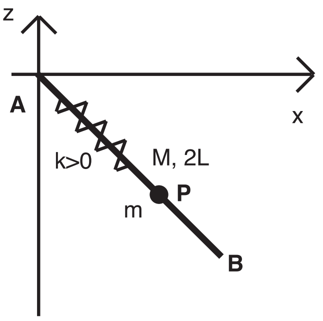
   (a) Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane opportune;

   (b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

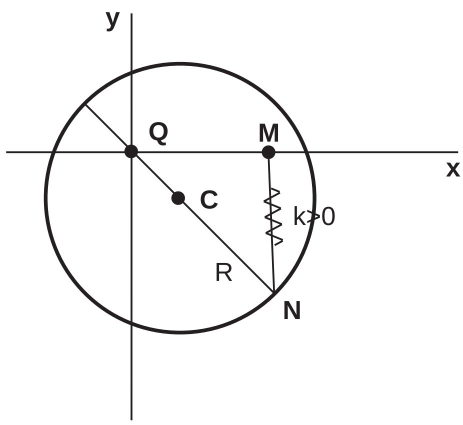
(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(d) scrivere le equazioni di Lagrange;

(e) studiare tutti i possibili moti nei quali l'angolo formato dall'asta con la verticale è costante.



9. Un disco materiale pesante di raggio R e massa m si muove nel piano verticale $O(x, y)$, libero di ruotare attorno al punto $Q = (0, 0)$ che è fisso e che si trova a distanza $R/2$ dal centro del disco C. Oltre alla forza peso, sul disco agisce una molla di costante elastica $k > 0$ che collega il punto N del bordo del disco e sullo stesso diametro di Q con il punto $M = (R, 0)$. Si chiede:



(a) determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane;

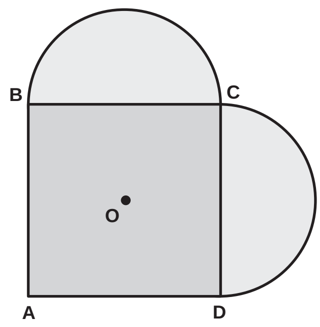
(b) scrivere le equazioni del moto utilizzando le equazioni di Lagrange;

(c) determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità;

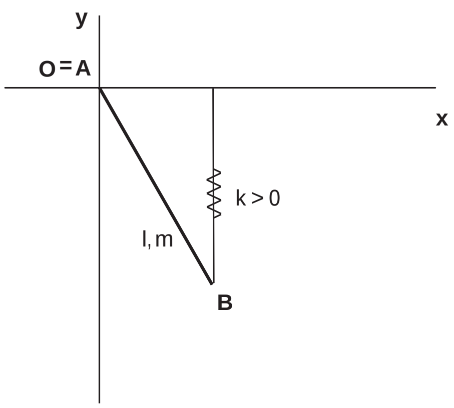
(d) determinare le reazioni vincolari in funzione delle coordinate lagrangiane scelte, nell'ipotesi che all'istante iniziale il punto N si trovi sull'asse x, $x > 0$, con velocità nulla.

10. Un corpo rigido è costituito da un quadrato $ABCD$ di lato L e massa M e da due semicerchi DC e CB di massa m, come in figura. Individuare, in base alle simmetrie

materiali, la terna principale d'inerzia $O(x, y, z)$ con l'origine nel vertice C e l'asse z ortogonale al piano della figura; calcolare quindi l'elemento I_{33} della matrice d'inerzia in tale sistema di riferimento.



11. Un'asta AB di massa m e lunghezza l è vincolata a ruotare in un piano verticale attorno all'estremo A, che è fisso. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega l'estremo B con la proiezione di B sulla retta orizzontale passante per A. Scrivere le equazioni del moto, utilizzando le equazioni di Lagrange. Determinare quindi le configurazioni di equilibrio e, supposto $k = mg/(4l)$, calcolare la reazione vincolare in O nella configurazione di equilibrio stabile.



12. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sulla parabola di equazione

$$y = \alpha[x - c(t)]^2$$

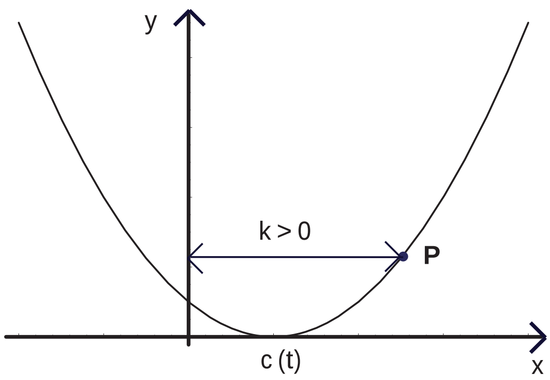
posta sul piano verticale $O(x, y)$. Il vertice della parabola è posto sull'asse x con ascissa $c(t)$, dove $c(t)$ è una funzione nota del tempo. Sul punto P agisce inoltre una molla di costante elastica $k > 0$ che collega P con la sua proiezione sull'asse y.

Si chiede:

(a) determinare il numero di gradi di libertà del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;

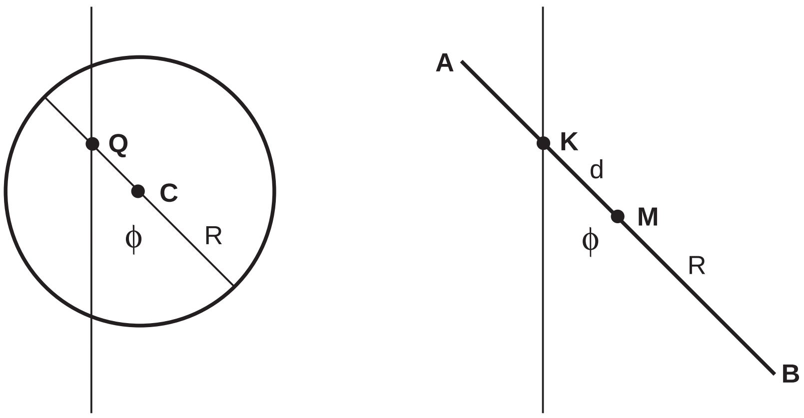
(b) scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale;

(c) scrivere le equazioni di Lagrange;



(d) determinare sotto quali condizioni sulla funzione $c(t)$ sono possibili moti di equilibrio relativo (cioè moti nei quali la posizione di P sulla parabola rimane costante).

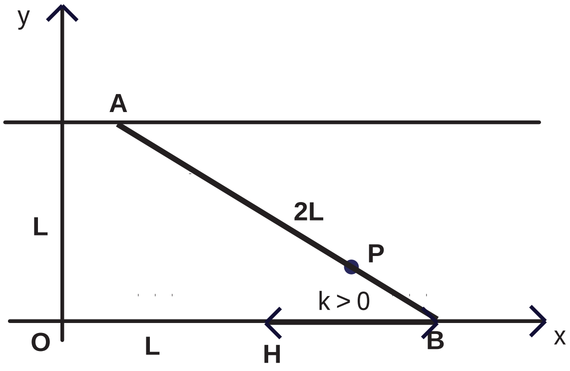
13. Si considerino due pendoli fisici costituiti rispettivamente da un cerchio di centro C, massa m e raggio R e da un'asta AB di massa m e lunghezza $2R$. Il punto di sospensione Q del cerchio è situato ad una distanza pari ad $R/2$ dal centro C; si indichi invece con d la distanza tra il punto di sospensione dell'asta, K, ed il suo punto medio M. Si indichi infine con ϕ l'angolo che, rispettivamente, il diametro contenente il punto Q del cerchio e l'asta formano con la verticale. Per quale valore di d i due pendoli sono equivalenti (cioè obbediscono alle stesse equazioni del moto)?



14. Un'asta materiale AB di massa M e lunghezza $2L$ ha gli estremi A e B vincolati a scorrere su due rette parallele, appartenenti al piano verticale $O(x, y)$, di equazione rispettivamente $y = 0$ ed $y = L$. Sull'estremo B dell'asta agisce inoltre una molla, di costante elastica $k > 0$, che richiama l'asta verso il punto $H = (0, L)$. Sull'asta scorre inoltre, senza attrito, un punto materiale P di massa m.

Si chiede:

(a) determinare il numero di gradi di libertà del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;

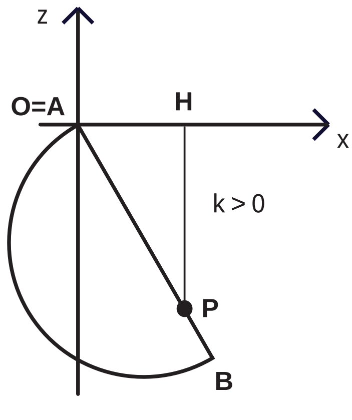


(b) scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale;

(c) scrivere le equazioni di Lagrange;

(d) studiare il moto del sistema.

15. Un contorno materiale pesante semicircolare AB di massa M e raggio R è libero di ruotare in un piano verticale attorno al vertice A, che è fisso. Sul diametro AB è libero di scorrere (con vincolo liscio) un punto P di massa m. Sul punto P agisce inoltre una molla di costante elastica $k > 0$ che lo collega al punto H, proiezione di P sull'asse orizzontale passante per A (vedi figura).



Si chiede:

(a) determinare il numero di gradi di libertà del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;

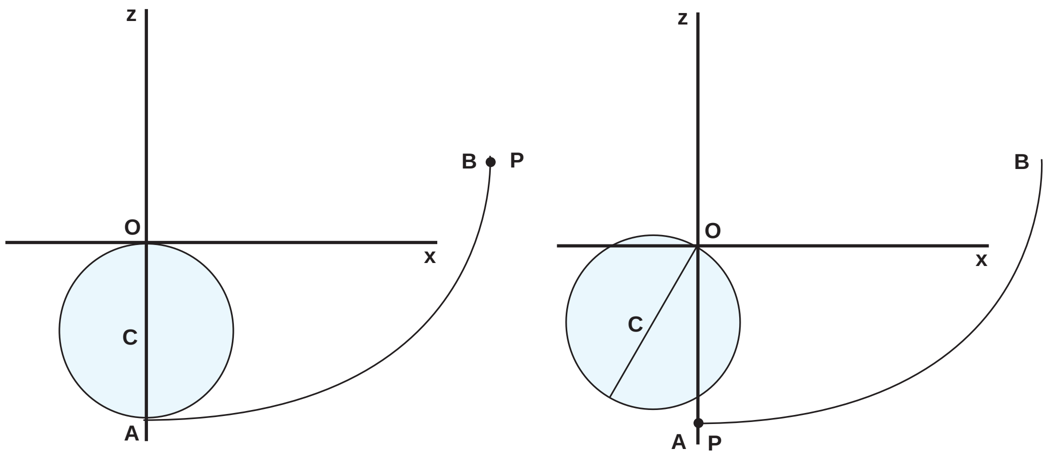
(b) determinare la posizione del centro di massa del contorno semicircolare;

(c) scrivere l'energia potenziale;

(d) determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

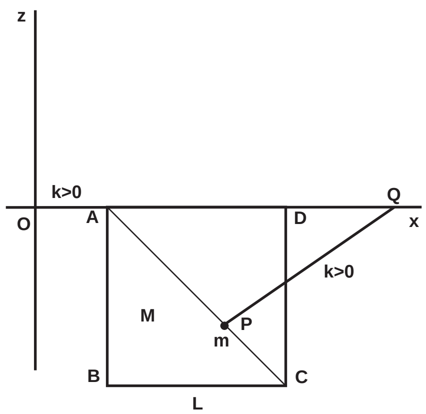
16. Un punto materiale P di massa m scende lungo una guida liscia curvilinea AB sotto l'effetto della gravita'. Il punto B e' situato ad un'altezza h rispetto ad una retta di riferimento orizzontale, che costituisce l'asse x, mentre nel punto A la guida ha tangente orizzontale. Il punto P parte da B con velocita' iniziale nulla, ed al termine della sua corsa lungo la guida (nel punto A) colpisce un disco materiale pesante pieno di massa M e raggio R, vincolato a ruotare nello stesso piano verticale attorno al

punto fisso O del bordo, appartenente all'asse x e situato sulla verticale per A. Il contatto tra il punto P ed il disco avviene sul punto del bordo diametralmente opposto ad O, ed inoltre si suppone che dopo l'urto il punto P sia fermo.



Si chiede di scrivere le equazioni del moto del disco dopo l'impatto col punto P e di calcolare la reazione vincolare in O in funzione delle coordinate lagrangiane scelte.

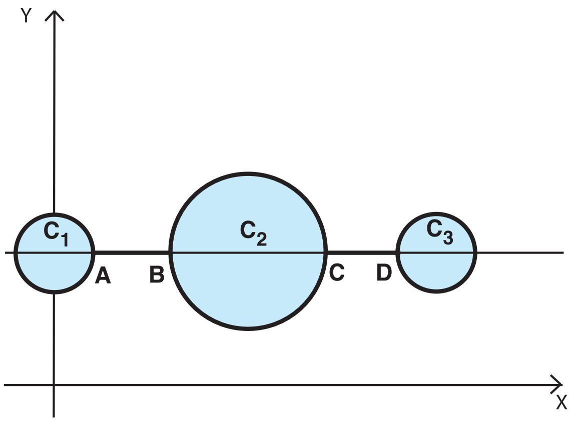
17. Una lamina materiale pesante quadrata $ABCD$ di lato L e massa M è posta in un piano verticale ed è libera di scorrere con il lato AD lungo una guida orizzontale (vedi figura), che scegliamo quale asse x. Lungo la diagonale AC della lamina è praticata una scanalatura, nella quale scorre un punto P di massa m. Oltre alla forza di gravità, sul sistema agiscono due molle, di ugual costante elastica $k > 0$ e che collegano il vertice A della lamina con l'origine O ed il punto P con il punto Q posto sulla guida orizzontale a distanza $2R$ da O. Si chiede:



- Determinare il numero di gradi di libertà del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;
- scrivere l'energia potenziale del sistema;
- determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità;
- trovare le reazioni vincolari nelle configurazioni di equilibrio stabile;
- scrivere l'energia cinetica del sistema;

- trovare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile
- scrivere le equazioni di Lagrange;
- determinare sotto quali condizioni sono possibili moti nei quali la posizione del punto P lungo la scanalatura rimane costante e determinare tali moti (compresa la distanza costante $\overline{PA}$).

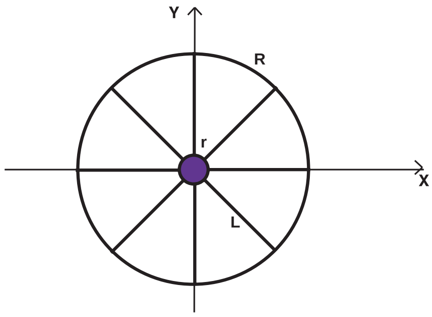
18. Calcolare tutti gli elementi della matrice d'inerzia del corpo rigido piano in figura, nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura (con l'asse z perpendicolare al piano della figura stessa), e costituito da:
    (a) due lamine circolari piene di raggio R, centri $C_1 = (0, L)$ e $C_3 = (10R, L)$ e massa m;
    (b) una lamina circolare piena di raggio $2R$, centro $C_2 = (5R, L)$ e massa M;
    (c) due aste AB e CD di lunghezza $2R$ e massa m, e dove $A = (R, L)$ e $C = (7R, L)$.



19. Una ruota di bicicletta può essere schematizzada con un corpo rigido costituito da

- una lamina circolare piena di raggio r, centro $C = (0,0)$ e massa M_1;
- un contorno circolare di raggio $R > r$, centro $C = (0,0)$ e massa M_2;
- otto raggi, di lunghezza $L = R - r$ e massa m; quattro di essi sono disposti lungo gli assi e quattro lungo le bisettirici dei quadranti (vedi figura).

Calcolare tutti gli elementi della matrica d'inerzia.



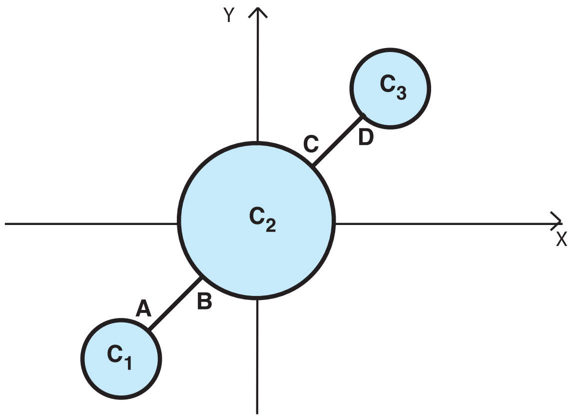
20. Calcolare tutti gli elementi della matrice d'inerzia del corpo rigido piano in figura, nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura (con l'asse z perpendicolare al piano della figura stessa), e costituito da:

(a) una lamina circolare piena di raggio $2R$, centro $C_2 = (0,0)$ e massa M;

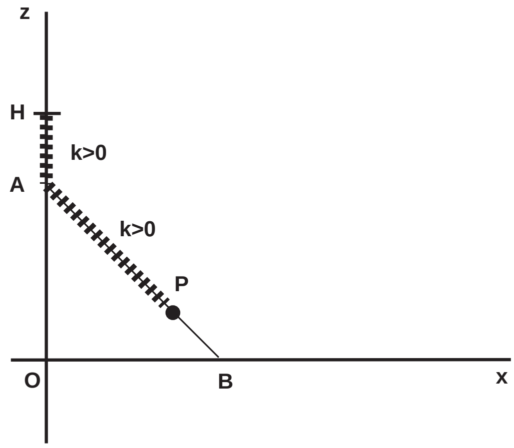
(b) due lamine circolari piene di raggio R, centri C_1 e C_3 e massa m;

(c) due aste AB e CD di lunghezza $2R$ e massa m.

I punti C_1, C_3, A, B, C e D si trovano tutti sulla retta bisettrice del I e III quadrante; C_1 e C_3 sono posti a distanza $5R$ dall'origine, A e D a distanza $4R$ e B e C a distanza $2R$.



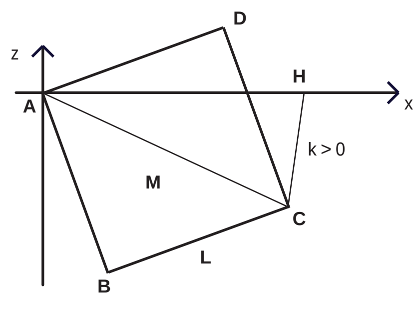
21. Un'asta materiale pesante AB di massa M e lunghezza L si muove nel piano verticale $O(x, z)$, con gli estremi A e B vincolati a scorrere senza attrito rispettivamente sull'asse z e sull'asse x. Una molla di costante elastica $k > 0$ agisce sull'estremo A dell'asta, collegandolo con il punto $H(0, L)$ posto sull'asse z sopra l'asta. Sull'asta stessa, scorre senza attrito il punto materiale P di massa m. Una seconda molla,



anch'essa di costante elastica $k > 0$, agisce sul punto P, collegandolo con l'estremo A dell'asta. Si chiede:

- Determinare il numero di gradi di libertà del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;
- scrivere l'energia cinetica del sistema;
- scrivere l'energia potenziale del sistema;
- determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità;
- determinare le reazioni vincolari nelle configurazioni di equilibrio stabile;
- calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alle configurazioni di equilibrio stabile.

22. Una lamina materiale pesante quadrata $ABCD$ di massa M e lato L è libera di ruotare in un piano verticale attorno al vertice A, che è fisso. Oltre alla forza peso, sulla lamina agisce una molla di costante elastica $k > 0$ che collega il vertice C, opposto ad A, con il punto fisso H, situato sulla orizzontale per A ed a distanza $L\sqrt{2}$ da esso (vedi figura).

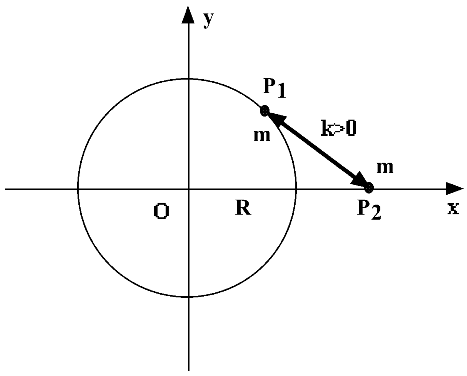


Si chiede:

(a) determinare il numero di gradi di libertà del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;
(b) scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale;
(c) scrivere le equazioni di Lagrange;

(d) supponendo che, all'istante iniziale, la lamina venga rilasciata con velocità nulla e con il vertice C alla stessa quota di A, si determini il valore della reazione vincolare in A al momento in cui il vertice C si trova sulla verticale per A al di sotto di esso.

23. Due punti materiali P_1 e P_2 di ugual massa m si muovono in un piano verticale $O(x, y)$. P_2 è vincolato a scorrere senza attrito sull'asse x, mentre P_1 è vincolato a scorrere, sempre senza attrito, sulla circonferenza di centro l'origine e raggio R. I due punti sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$.

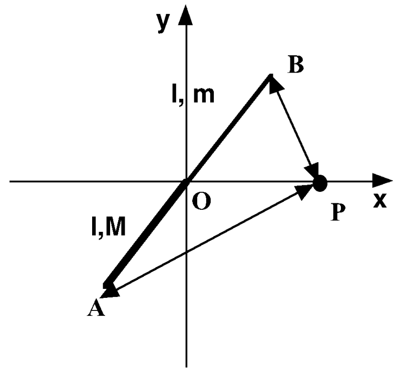


Si chiede:

(a) determinare il numero di gradi di libertà del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;
(b) scrivere l'energia potenziale del sistema;
(c) scrivere l'energia cinetica del sistema;
(d) determinare le configurazioni di equilibrio;
(e) calcolare le reazioni vincolari in tutte la configurazioni di equilibrio;
(f) discutere la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate;
(g) trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alle configurazioni di equilibrio stabile;.

24. Un sistema materiale piano e' costituito punto P di massa m e da un'asta AB di lunghezza $2l$ che si muovono su un piano orizzontale. Il punto P scorre senza attrito su una guida orizzontale mentre l'asta AB e' libera di ruotare attorno al suo punto medio O, che e' fisso sulla guida. L'asta e' non omogenea, con AO di massa M ed OB di massa m. Due molle di costanti elastiche k_1 e k_2 (positive) collegano gli estremi A a B dell'asta con il punto P. Si chiede di:

(a) determinare il numero di gradi di liberta' e scegliere le coordinate lagrangiane;
(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;
(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;
(d) determinare le posizioni di equilibrio;
(e) calcolare le reazioni vincolari in tutte le configurazioni di equilibrio;



(f) studiare la stabilita' delle posizioni di equilibrio trovate;

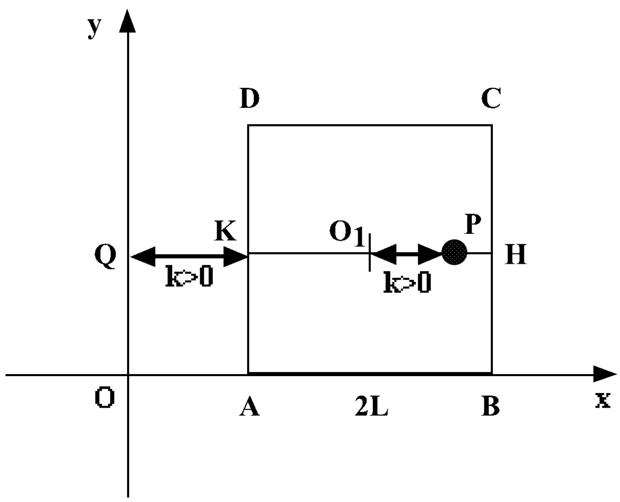
(g) calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alle configurazioni di equilibrio stabile;

(h) scrivere le equazioni di Lagrange;

(i) verificare il teorema di conservazione dell'energia usando le equazioni di Lagrange;

(j) risolvere le equazioni di Lagrange nel caso particolare $k_1 = k_2$.

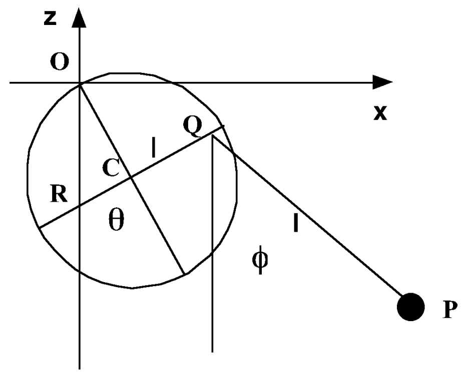
25. Una lamina quadrata $ABCD$ di lato $2L$ e massa $2m$ ha il lato AB vincolato a scorrere senza attrito su una guida orizzontale. Sul punto medio K del lato (verticale) AD è applicata una molla, di costante elastica $k > 0$, che richiama la lamina verso il punto Q di un asse verticale alla stessa quota di K. Sulla lamina è praticata una scanalatura orizzontale KH, con H il punto medio del lato BC, nella quale scorre un punto materiale P di massa m, a sua volta soggetto all'azione di una molla di costante elastica $k > 0$ (uguale a quella dell'altra molla) che richiama il punto P verso il punto medio della scanalatura O_1. Nella scanalatura è inoltre presente un mezzo viscoso di costante di viscosità λ.



Si chiede:

(a) determinare il numero di gradi di libertà del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;
(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;
(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;
(d) determinare la componente non conservativa delle forze generalizzate di Lagrange;
(e) scrivere le equazioni di Lagrange;
(f) studiare il moto del sistema risolvendo le equazioni di Lagrange nel caso non viscoso, $\lambda = 0$.

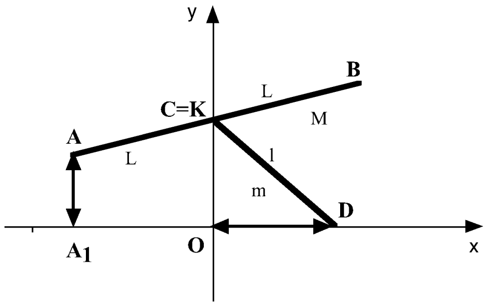
26. Un cerchio omogeneo di massa M, centro C e raggio R si muove nel piano verticale Oxz, con z verticale ascendente ed e' libero di ruotare attorno al punto fisso O del bordo. Sia Q un punto appartenente al diametro perpendicolare al diametro passante per O e posto a distanza λ da C, con $0 \leq \lambda \leq R$. Un pendolo matematico e' costituito da un punto P di massa m e da una sbarretta priva di massa QP. Scelte come coordinate lagrangiane gli angoli θ e ϕ che rispettivamente il diametro OC e la sbarretta QP formano con la verticale, si chiede di:



(a) scrivere l'energia cinetica del sistema;
(b) scrivere l'energia potenziale del sistema;
(c) determinare le posizioni di equilibrio;
(d) studiare la stabilita' delle posizioni di equilibrio trovate;
(e) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alle configurazioni di equilibrio stabile.

27. Un sistema materiale pesante è costituito da due aste omogenee AB e CD, di lunghezza rispettivamente $2L$ ed l e masse, rispettivamente, M ed m, che si muovono in un piano verticale. Il centro di massa K dell'asta AB è vincolato a scorrere senza attrito su una retta verticale e l'asta è libera di ruotare attorno a K. L'asta CD ha l'estremo C coincidente con K e l'estremo D vincolato a scorrere senza attrito su una retta orizzontale. Due molle di ugual costante elastica k uniscono l'estremo A con la sua proiezione A_1 sulla retta orizzontale e l'estremo D con il punto O di intersezione tra le due rette.

Si chiede:



(a) determinare il numero di gradi di libertà del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

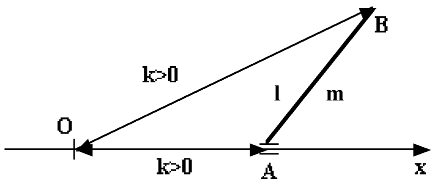
(d) determinare le posizioni di equilibrio;

(e) studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio trovate;

(f) determinare le reazioni vincolari nelle configurazioni di equilibrio trovate;

(g) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alle configurazioni di equilibrio stabile.

28. Un'asta materiale omogenee AB, di lunghezza l e masse m, si muove in un piano orizzontale. L'estremo A scorre senza attrito sull'asse x, mentre l'asta stessa è libera di ruotare attorno ad A. Due molle di costante elastica $k > 0$ uniscono gli estremi dell'asta con il punto O dell'asse x. Sull'asta agisce inoltre una forza viscosa $\mathbf{F}_v$ di costante λ, che possiamo pensare applicata al centro di massa (se $\mathbf{v}_0$ è la velocità del centro di massa, $\mathbf{F}_v = -\lambda \mathbf{v}_0$).



Si chiede:

(a) determinare il numero di gradi di liberta' del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(d) determinare la componente non conservativa delle forze lagrangiane;

(e) scrivere le equazioni di Lagrange;

(f) determinare i moti possibili in cui l'inclinazione dell'asta rispetto all'asse x rimane costante nel tempo e studiare esplicitamente tali moti.

29. Calcolare tutti gli elementi della matrice d'inerzia del corpo rigido piano in figura, nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura (con l'asse z perpendicolare al piano della figura stessa), e costituito da

(a) una lamina quadrata $ABCD$ di lato $2R$ e massa M posta nella regione $\{(x, y) : -R \leq x \leq R,\ -R \leq y \leq R\}$ del piano (x, y);

(b) quattro contorni semicircolari di raggio R e di ugual massa m, attaccati a ciascuno dei lati della lamina $ABCD$.