

Leggi di Newton ed esempi

1 Leggi di Newton

Lo spazio delle fasi. Il moto di un punto materiale nello spazio è descritto dalla dipendenza temporale delle sue grandezze cinematiche, posizione, velocità ed accelerazione. Una volta introdotto un sistema di coordinate cartesiane ortogonale $O(x, y, z)$, la traiettoria percorsa è data in rappresentazione parametrica dalla dipendenza dal tempo delle coordinate (o del vettore posizione) mentre le sue proprietà differenziali sono date dal vettore velocità. Se, peraltro, la traiettoria del punto sia una retta od una circonferenza o un'altra curva ancora, e con quale velocità esso la percorra, lo si deve alle cause che generano il moto. Lo studio del moto di un punto materiale o di un insieme di punti materiali in relazione alle cause che lo generano, è detto *dinamica*. È opportuno, a questo punto, introdurre la nozione di *stato cinematico* di un punto materiale, come un insieme di *sei coordinate*, le tre componenti del vettore posizione e le tre componenti del vettore velocità. Indicheremo lo stato cinematico con il simbolo Γ e, per evidenziare che le sue componenti dipendono dal tempo, scriveremo $\Gamma(t)$. Se $x(t), y(t), z(t)$ sono le coordinate (o componenti del vettore posizione) del punto P e $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$ le componenti del vettore velocità, abbiamo $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t), v_x(t), v_y(t), v_z(t))$. Naturalmente, valgono le relazioni

$$\dot{x}(t) = v_x(t) \tag{1}$$

$$\dot{y}(t) = v_y(t) \tag{2}$$

$$\dot{z}(t) = v_z(t). \tag{3}$$

Gli stati cinematici di un punto materiale non vincolato “vivono” nello spazio vettoriale \mathbb{R}^6 , detto in questo caso *spazio delle fasi*. Ad ogni istante di tempo il punto materiale è rappresentato dal suo stato cinematico nello spazio delle fasi, e $\Gamma(t)$ viene appunto detto *punto rappresentativo* all'istante t . La conoscenza dello stato cinematico di un punto come funzione del tempo equivale alla conoscenza completa del suo moto. Non è un caso che si usi lo stesso termine già adoperato nella sezione 2.5 per le soluzioni di un sistema differenziale; le ragioni di questa analogia diverranno più chiare in seguito.

Il problema fondamentale della dinamica. Il quesito fondamentale che ci poniamo dunque è: dato, o comunque noto, lo stato cinematico di un punto ad un'istante

t_0 , che chiameremo *istante iniziale*, $\Gamma(t_0)$, come possiamo prevedere o determinare lo stato cinematico agli istanti successivi, $\Gamma(t)$ per $t > t_0$? Appoggiandoci all'esperienza, sappiamo ad esempio che, se attacchiamo una pallina ad una molla e la rilasciamo da ferma ad una certa distanza dal centro della molla, la pallina inizierà ad oscillare avanti e indietro, in modo tanto più rapido quanto più leggera è la pallina e quanto più intensa è l'azione della molla. L'evoluzione dello stato cinematico dipende dunque, in questo esempio, da una caratteristica intrinseca della pallina e da una caratteristica dell'azione cui viene sottoposta. A parità di queste condizioni, però, lo stato cinematico agli istanti successivi, $\Gamma(t)$ per $t > t_0$, dipende soltanto dallo stato cinematico all'istante iniziale, $\Gamma(t_0)$. Questo fatto, che noi chiameremo *principio di determinismo*, cioè che la conoscenza dello stato cinematico all'istante iniziale è sufficiente a determinare lo stato cinematico agli istanti successivi, sta alla base della dinamica.

Le equazioni del moto. Da quanto detto precedentemente, cioè che l'evoluzione dello stato cinematico dipende solo dallo stato cinematico all'istante iniziale, è chiaro che l'equazione che governa l'andamento temporale di $\Gamma(t)$ deve essere del tipo

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \mathbf{X}(\Gamma, t) \quad (4)$$

per una opportuna funzione vettoriale \mathbf{X} a 6 componenti, che non può contenere, fra i suoi argomenti, le accelerazioni. Le prime tre componenti della (4) sono semplicemente la definizione del vettore velocità (1)-(3) e pertanto

$$X_1 = v_x$$

$$X_2 = v_y$$

$$X_3 = v_z.$$

Indicando con X_x, X_y, X_z le ultime tre componenti del vettore \mathbf{X} e derivando rispetto al tempo, rimangono con le tre equazioni

$$\ddot{x} = X_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \quad (5)$$

$$\ddot{y} = X_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \quad (6)$$

$$\ddot{z} = X_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \quad (7)$$

Nell'esempio della pallina e molla fatto in precedenza, si era detto che l'evoluzione temporale dello stato cinematico dipende anche da una proprietà intrinseca del punto materiale, che chiameremo *massa* ed indicheremo con m . Con l'introduzione della massa come unica proprietà intrinseca del punto, le (5)-(7) si trasformano nelle

$$m \ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \quad (8)$$

$$m \ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \quad (9)$$

$$m \ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \quad (10)$$

che vengono dette *equazioni del moto* o *equazioni di Newton*. Vettorialmente, si scrivono nella forma

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (11)$$

dove il vettore $\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{i}} + F_y \hat{\mathbf{j}} + F_z \hat{\mathbf{k}}$ viene detto *forza* ed è una grandezza misurabile sperimentalmente. La (11) è nota come *seconda legge di Newton* o *seconda legge della dinamica*.

Sistemi inerziali. Notiamo che, dalla (11), se un punto materiale non è soggetto ad alcuna forza, la sua accelerazione è nulla. Ovviamente, l'accelerazione che compare nella (11) è l'accelerazione assoluta, in un sistema di riferimento fisso, in cui le direzioni degli assi coordinati non variano nel tempo. Se ci mettiamo in un sistema di riferimento relativo, allora l'assenza di forze agenti sul sistema non implica un'accelerazione nulla. Giungiamo così alla seguente definizione: Un sistema di riferimento nel quale un corpo non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme o rimane in quiete si chiama *sistema inerziale*.

Leggi di Newton. Immaginiamo che lo studente abbia già conseguito familiarità con le leggi di Newton dai corsi di fisica generale. Ci limitiamo qui pertanto ad enunciarle con qualche commento.

1. La prima legge afferma che *esiste almeno un sistema inerziale*. Ovviamente, qualunque altro sistema di riferimento ottenuto da un sistema inerziale per traslazione è pure inerziale; quindi, esistono infiniti sistemi inerziali.
2. La seconda legge è semplicemente la seconda legge della dinamica (11).
3. La terza legge riguarda le mutue interazioni tra i corpi ed afferma che *l'azione esercitata da un punto P su un punto Q , diverso da P , e l'azione esercitata dal punto Q sul punto P sono dirette lungo la retta congiungente i due punti, hanno uguale intensità e verso opposto*. Questa legge può essere riformulata dicendo che le due forze sopra menzionate *formano una coppia di braccio nullo*.

Le prime due leggi sono alla base dello studio del moto dei punti materiali, mentre la terza legge è alla base dello studio dei sistemi di punti materiali.

2 Campi di forza

Ci occupiamo qui in dettaglio del secondo membro della (11). Chiameremo *campo di forze*, definito in una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, una funzione vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ le cui componenti siano di classe C^1 in Ω . Dopo aver introdotto un sistema di coordinate cartesiane $O(x, y, z)$, scriviamo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z) \hat{\mathbf{i}} + F_y(x, y, z) \hat{\mathbf{j}} + F_z(x, y, z) \hat{\mathbf{k}}, \quad (12)$$

con F_x , F_y ed F_z di classe C^1 in Ω . Sia ora γ un curva regolare a tratti, interamente contenuta in Ω , e siano A e B i suoi estremi. Definiamo *lavoro del campo di forze lungo la curva γ tra A e B* , $L_{AB}(\gamma)$, l'integrale

$$L_{AB}(\gamma) = \int_{A,\gamma}^B \mathbf{F} \cdot dP \quad (13)$$

dove con la notazione $\int_{A,\gamma}^B$ intendiamo che l'integrale va fatto da A a B lungo γ . Esplicitando per componenti il prodotto scalare nella funzione integranda otteniamo

$$L_{AB}(\gamma) = \int_{A,\gamma}^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (14)$$

dove $\hat{\omega} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ è una forma differenziale. Se la forma differenziale è esatta, il campo si dice *conservativo* e l'integrale (13) non dipende dalla curva γ ma soltanto dagli estremi A e B . In tal caso, essendo $\hat{\omega}$ esatta, esiste una funzione differenziabile $U(x, y, z)$ tale che $\hat{\omega} = dU$, e per i coefficienti della forma differenziale F_x , F_y ed F_z vale la relazione

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (15)$$

ovvero, in forma vettoriale,

$$\mathbf{F} = \nabla U \quad (16)$$

Vale inoltre

$$L_{AB}(\gamma) = U(B) - U(A) \quad (17)$$

lungo qualsiasi curva γ interamente contenuta nel dominio Ω . La funzione $U(x, y, z)$ è detta *potenziale del campo* ed è comunque definita a meno di una costante arbitraria. Per un campo conservativo, valgono i seguenti teoremi:

Teorema 2.1. *Un campo conservativo è irrotazionale, cioè $\nabla \times \mathbf{F} = 0$*

Dimostrazione. È sufficiente calcolare una componente del rotore di \mathbf{F} , per le altre il discorso è del tutto analogo. Indicando con $\hat{\mathbf{k}}$ il versore dell'asse z , abbiamo:

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal teorema di Schwarz sulle derivate seconde miste (ricordiamo che le componenti del campo sono derivabili una volta con continuità).

□

Teorema 2.2. *Il lavoro compiuto da un campo conservativo su una curva chiusa, interamente contenuta nel dominio Ω è nullo.*

Dimostrazione. Il teorema segue immediatamente dal fatto che ogni forma differenziale esatta è anche chiusa. Oppure, in maniera più dettagliata, si consideri una curva chiusa qualsiasi \mathcal{C} , orientata in senso antiorario, e siano A e B due punti arbitrari su di essa. I due punti A e B dividono la curva \mathcal{C} in due parti, una curva γ ed una curva γ' , aventi gli estremi A e B in comune ed entrambe contenute in Ω . Allora

$$\begin{aligned}\int_{A,\gamma}^B \mathbf{F} \cdot dP &= \int_{A,\gamma'}^B \mathbf{F} \cdot dP = - \int_{A,-\gamma'}^B \mathbf{F} \cdot dP \\ \int_{A,\gamma}^B \mathbf{F} \cdot dP + \int_{A,(-\gamma')}^B \mathbf{F} \cdot dP &= 0 \\ \int_{A,\gamma \cup (-\gamma')}^B \mathbf{F} \cdot dP &= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot dP = 0\end{aligned}$$

che completa la dimostrazione, poichè $\gamma \cup (-\gamma')$ costituisce una curva chiusa.

□

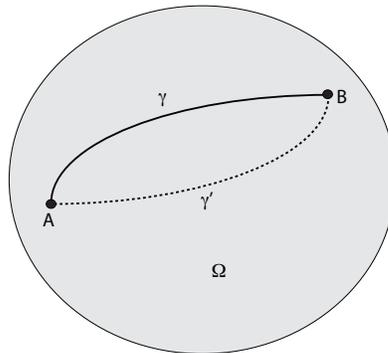


Fig. 1: Il dominio Ω ed i cammini γ e γ' .

Sorge naturale la domanda se un campo irrotazionale sia necessariamente conservativo. Come vedremo con qualche esempio, la risposta è negativa e vale il seguente teorema, di cui forniamo soltanto l'enunciato:

Teorema 2.3. *Se il dominio Ω è semplicemente connesso, allora un campo \mathbf{F} è conservativo se e solo se è irrotazionale.*

Riassumendo, un campo conservativo è sempre irrotazionale, in qualunque dominio; un campo irrotazionale in un dominio che non sia semplicemente connesso può essere conservativo o meno; le condizioni di conservatività ed irrotazionalità si

equivalgono solo in un dominio semplicemente connesso.

Esempi.

1) Come primo esempio, consideriamo il *campo costante*, $\mathbf{F} = \text{costante}$. Le sue componenti sono le funzioni costanti F_x , F_y ed F_z ed il dominio è $\Omega = \mathbb{R}^3$, che è semplicemente connesso. Essendo banalmente $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ il campo è conservativo ed il suo potenziale è dato da

$$U(x, y, z) = F_x x + F_y y + F_z z, \quad (18)$$

come si vede facilmente, e dove la costante arbitraria è stata scelta in modo da avere $U(0, 0, 0) = 0$.

2) Un secondo esempio importante è dato dal campo elastico, dato da

$$\mathbf{F} = -k(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) = -k(P - O). \quad (19)$$

Anche in questo caso il dominio è $\Omega = \mathbb{R}^3$, che è semplicemente connesso. Si verifica immediatamente che $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, quindi il campo è conservativo ed il potenziale è dato da

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= -\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= -\frac{1}{2}k(P - O)^2 = -\frac{1}{2}k|P - O|^2, \end{aligned} \quad (20)$$

avendo scelto la costante in modo che $U(0, 0, 0) = 0$.

3) Un punto di massa M , posto nell'origine di un sistema di coordinate $O(x, y, z)$ genera un campo gravitazionale diretto secondo la direzione radiale; la forza dovuta a tale campo esercitata su un punto di massa m si può esprimere come

$$\mathbf{F} = -G \frac{M m}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r = -G M m \frac{P - O}{|P - O|^3} \quad (21)$$

dove r ed $\hat{\mathbf{e}}_r$ sono stati introdotti in precedenza e G è la costante di gravitazione universale. Il dominio è $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus O$, cioè tutto lo spazio privato dell'origine. Il dominio è semplicemente connesso ed il rotore è nullo; verifichiamolo soltanto per la componente z :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{k}} &= -G M m \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \right] \\ &= \frac{G M m}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \left[\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} (2xy) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} (2xy) \right] = 0. \end{aligned}$$

Il potenziale del campo gravitazionale è dato da

$$U(x, y, z) = -G \frac{M m}{r}, \quad (22)$$

con

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U = 0,$$

e per il suo calcolo rimandiamo al prossimo paragrafo.

4) Il campo di Biot-Savart è il campo generato da un filo di corrente infinito. Non entriamo nei dettagli del suo calcolo e ci limitiamo a scriverne l'espressione: se il filo è disposto lungo l'asse z , il campo non dipende dalla coordinata z ed è dato da

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x \hat{\mathbf{j}} - y \hat{\mathbf{i}}}{x^2 + y^2} \quad (23)$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica nel vuoto ed I è l'intensità della corrente che scorre nel filo. Il dominio di questo campo è dato da $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$, cioè tutto lo spazio privato dell'asse z , e non è semplicemente connesso. Il rotore è nullo; è banale verificare che $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0$, mentre

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{k}} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \right) \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

Per capire se il campo è conservativo o meno, calcoliamo la sua circuitazione sulla circonferenza di raggio R e centro l'origine sul piano $O(x, y)$. Utilizzando coordinate polari piane otteniamo:

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi R d\varphi = \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot (-\hat{\mathbf{i}} \sin \varphi + \hat{\mathbf{j}} \cos \varphi) R d\varphi \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi}{x^2 + y^2} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{R} \neq 0 \end{aligned}$$

e quindi il campo non è conservativo. Questo è un esempio di come l'implicazione irrotazionalità-conservatività di un campo valga in entrambi i sensi solo in un dominio semplicemente connesso.

5) Un caso particolare di campo costante è il campo gravitazionale nelle vicinanze della superficie terrestre, cioè quando il moto avviene in una regione di dimensioni sufficientemente piccole da poter trascurare la curvatura terrestre. In un sistema di riferimento con l'origine O sulla superficie terrestre, l'asse z diretto lungo la verticale

ascendente e gli assi x ed y sul piano tangente alla superficie terrestre, la forza di gravità giace lungo l'asse z con verso negativo e può essere scritta come

$$\mathbf{F}_g = -m g \hat{\mathbf{k}} \quad (24)$$

dove g è l'accelerazione di gravità e m la massa del corpo immerso nel campo gravitazionale. Il potenziale del campo è dato dalla (18) con $F_x = F_y = 0$ ed $F_z = -m g$, quindi

$$U(z) = -m g z, \quad (25)$$

con $U(0) = 0$.

3 Calcolo del potenziale di un campo conservativo

Illustriamo ora un metodo generale per il calcolo del potenziale di un campo di forze, dato in generale dalla (12), una volta assodato che esso sia conservativo. Supponiamo, per semplicità, $\Omega = \mathbb{R}^3$, sia $P(x, y, z)$ un punto arbitrario e poniamo $U(O) = 0$. Nel seguito, scriveremo spesso, per brevità, $U(P)$ per indicare $U(x, y, z)$ ed analogamente $U(O)$ per indicare $U(0, 0, 0)$. Siccome il campo è conservativo per ipotesi, l'integrale del lavoro non dipende dalla curva prescelta ma solo dagli estremi; quindi

$$\int_{O, \gamma}^P \mathbf{F} \cdot dP = U(P) - U(O) = U(P)$$

lungo una qualunque curva γ che colleghi P ed O . Scegliamo una curva particolare, una spezzata data da tre segmenti paralleli agli assi coordinati, al modo seguente: il primo segmento lungo l'asse x , dall'origine fino al punto di ascissa x , sia P_1 ; il secondo segmento parallelo all'asse y , a partire da P_1 fino al punto di coordinate x, y sul piano $O(x, y)$, sia P_2 ; il terzo segmento parallelo all'asse z , da P_2 a P . L'integrale del lavoro lungo la curva spezzata scelta si scrive pertanto:

$$\begin{aligned} \int_O^P \mathbf{F} \cdot dP &= \int_O^{P_1} \mathbf{F} \cdot dP + \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot dP + \int_{P_2}^P \mathbf{F} \cdot dP \\ &= \int_0^x F_x(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_x(x, t, 0) dt + \int_0^z F_x(x, y, t) dt, \end{aligned}$$

e pertanto

$$U(x, y, z) = \int_0^x F_x(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_x(x, t, 0) dt + \int_0^z F_x(x, y, t) dt \quad (26)$$

Questo metodo è generalizzabile anche al caso in cui Ω non coincida con tutto \mathbb{R}^3 , con l'avvertenza che, nella costruzione della spezzata, non si deve uscire dal dominio. Inoltre, i potenziali dei campi introdotti negli esempi della sezione precedente si calcolano facilmente usando la (26). Illustriamo l'applicazione del metodo al caso del potenziale gravitazionale esatto, il campo (21).

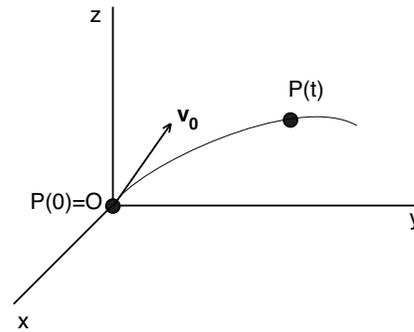


Fig. 2: Moto ballistico di un grave.

4 Altri tipi di forza

Non tutte le forze presenti in natura sono riconducibili alle forze presentate (in generale o come esempi) nella sezione precedente. Ad esempio, se si vuole rappresentare l'effetto della resistenza dell'aria o di un altro mezzo viscoso sul moto di un corpo, si introduce una forza dipendente dalla velocità \mathbf{F}_λ data, in prima approssimazione, da

$$\mathbf{F}_\lambda = -\lambda \mathbf{v}, \quad (27)$$

consistente con quanto mostrato dall'esperienza, che la resistenza del mezzo è piccola per velocità piccole ed aumenta al crescere della velocità.

Un altro esempio di forza dipendente dalla velocità è la forza di Lorentz \mathbf{F}_L , che è la forza esercitata da un campo magnetico su una particella carica ed è data da

$$\mathbf{F}_L = \frac{q \mathbf{B}}{m c} \quad (28)$$

dove q è la carica elettrica della particella ed m la sua massa, c è la velocità della luce e \mathbf{B} il vettore induzione magnetica.

5 Moto dei gravi

Siamo ora in grado di studiare il moto di alcuni sistemi semplici. Iniziamo dal moto dei gravi, per proseguire nella prossima sezione con i moti oscillatori.

Il moto di un grave è il moto di un punto materiale sotto l'azione della forza di gravità. Lo studente dovrebbe aver già acquisito familiarità con l'argomento durante i corsi di Fisica Generale. Tratteremo qui di seguito il problema del moto ballistico di un grave e la caduta di un grave da un'altezza predefinita, in assenza o in presenza della resistenza dell'aria.

Moto ballistico di un grave nel vuoto. Si consideri la situazione di figura 2, dove un punto materiale P di massa m si muove sotto l'effetto della forza di gravità,

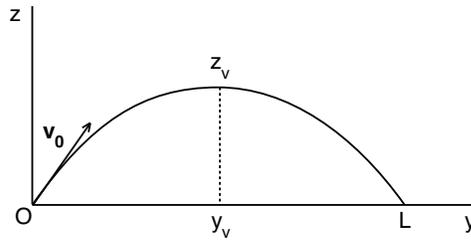


Fig. 3: Traiettoria parabolica di un grave.

data dalla (24). Questo è il modello usato per descrivere il moto di un proiettile, dove il piano coordinato $O(x, y)$ rappresenta il terreno. All'istante iniziale il punto P si trova nell'origine, con velocità iniziale \mathbf{v}_0 appartenente al piano $O(y, z)$ e che forma un angolo α con l'asse y . La seconda legge di Newton (8)-(10) offre per questo caso,

$$\ddot{x} = 0 \quad (29)$$

$$\ddot{y} = 0 \quad (30)$$

$$\ddot{z} = -g \quad (31)$$

che dobbiamo risolvere con le condizioni iniziali $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0 \cos \alpha$ e $\dot{z}(0) = v_0 \sin \alpha$. Si vede facilmente che, per ogni $t > 0$, si ha $\dot{x}(t) = x(t) = 0$. Ne segue che il moto del punto materiale rimane confinato sul piano $O(y, z)$; per l'arbitrarietà del sistema di riferimento, possiamo dire che il moto di un grave nel vuoto è contenuto nel piano generato dai vettori forza di gravità e velocità iniziale.

Integrando le due equazioni lungo y e lungo z abbiamo:

$$\dot{y} = C_1 = \dot{y}(0) = v_0 \cos \alpha \quad (32)$$

$$\dot{z} = -gt + C_2 = -gt + \dot{z}(0) = -gt + v_0 \sin \alpha \quad (33)$$

e

$$y(t) = v_0 t \cos \alpha + y(0) = v_0 t \cos \alpha \quad (34)$$

$$z(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha + z(0) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha. \quad (35)$$

Le (34) e (35) forniscono la rappresentazione parametrica di una parabola (vedi figura 3), la cui equazione cartesiana si ottiene eliminando il tempo:

$$z = -\frac{g y^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} + y \tan \alpha \quad (36)$$

La quota massima raggiunta dal punto lungo la sua traiettoria è il vertice della parabola che si ha per

$$y = y_V \equiv \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$z = z_V \equiv \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

La distanza L del punto di ricaduta del grave sul terreno dal punto di partenza viene detta *gittata*, e si può calcolare imponendo $z = 0$ nella (36). Si ottiene facilmente

$$L = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

La gittata massima si ha quando $\sin 2\alpha = 1$, cioè per $\alpha = \pi/4$.

Caduta verticale di un grave nel vuoto. Supponiamo di lasciar cadere un corpo (punto materiale) di massa m da un'altezza h . Le equazioni del moto (8)-(10) danno per questo caso sono ancora date dalle (29)-(31) ma con le condizioni iniziali $x(0) = y(0) = 0$, $z(0) = h$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$. Si vede facilmente che, per ogni $t > 0$, si ha $\dot{x}(t) = \dot{y}(t) = 0$, cioè il moto si sviluppa lungo la direzione della forza di gravità.

Integrando l'equazione lungo z abbiamo:

$$\dot{z} = -gt + C_2 = -gt + \dot{z}(0) = -gt$$

$$z(t) = -g \frac{t^2}{2} + z(0) = -g \frac{t^2}{2} + h$$

L'impatto con il suolo si ha quando $z = 0$, quindi per

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

e la velocità al momento dell'impatto è

$$v = |\dot{z}| = \sqrt{2gh}.$$

Moto ballistico di un grave in un mezzo viscoso. Si consideri nuovamente la situazione di figura 2, dove un punto materiale P di massa m si muove sotto l'effetto della forza di gravità, data dalla (24). Supponiamo però, stavolta, che il moto non avvenga nel vuoto ma in un mezzo resistente, ad esempio l'aria. La presenza del mezzo viene modellata con una forza di resistenza viscosa \mathbf{F}_λ data, in prima approssimazione, dalla (27). Le condizioni iniziali siano le stesse del moto di un grave nel vuoto.

La seconda legge di Newton (8)-(10) offre per questo caso,

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= -\lambda \dot{x} \\ m \ddot{y} &= -\lambda \dot{y} \\ m \ddot{z} &= -\lambda \dot{z} - m g \end{aligned}$$

che dobbiamo risolvere con le condizioni iniziali $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0 \cos \alpha$ e $\dot{z}(0) = v_0 \sin \alpha$. Riscriviamo le equazioni introducendo il parametro

$$\tau = \frac{m}{\lambda}$$

che ha le dimensioni di un tempo, e rappresenta il tempo caratteristico con cui la forza viscosa smorza la velocità del corpo:

$$\ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{\tau} \quad (37)$$

$$\ddot{y} = -\frac{\dot{y}}{\tau} \quad (38)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\dot{z}}{\tau} - g \quad (39)$$

Le equazioni (37)-(39) sono facilmente integrabili una volta; indicando con $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ e $v_z = \dot{z}$ per comodità, otteniamo

$$v_x(t) = v_x(0) e^{-t/\tau} = 0 \quad (40)$$

$$v_y(t) = v_0 e^{-t/\tau} \cos \alpha \quad (41)$$

$$v_z(t) = (v_0 \sin \alpha + g \tau) e^{-t/\tau} - g \tau \quad (42)$$

Da queste equazioni, notiamo che, per tempi molto più grandi del tempo caratteristico τ , le componenti della velocità lungo x e lungo y tendono a zero, mentre la componente lungo z tende al valore costante $-g\tau$. Quest'ultima osservazione è consistente con l'esperienza del paracadutista, che nell'ultimo tratto di volo cade con velocità costante.

Integrando ulteriormente le equazioni otteniamo la rappresentazione parametrica della traiettoria:

$$x(t) = 0 \quad (43)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= -v_0 \tau e^{-t/\tau} \cos \alpha + y(0) \\ &= -v_0 \tau e^{-t/\tau} \cos \alpha \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} z(t) &= -\tau (v_0 \sin \alpha + g \tau) e^{-t/\tau} - g \tau t + z(0) \\ &= -\tau (v_0 \sin \alpha + g \tau) e^{-t/\tau} - g \tau t \end{aligned} \quad (45)$$

da cui vediamo che la coordinata y tende asintoticamente a zero, mentre z , per tempi grandi, assume una dipendenza lineare dal tempo.

6 Moti oscillatori

I moti oscillatori costituiscono un capitolo molto importante della meccanica, per la vastità delle applicazioni ed i molti fenomeni che si possono ricondurre alle soluzioni delle equazioni che li governano. Il moto oscillatorio è il moto di un punto materiale soggetto ad una forza elastica, in una, due o tre dimensioni. Tale moto può svolgersi nel vuoto od in un mezzo viscoso, ed essere soggetto a forze addizionali dette *forzanti*.

In questa sezione studieremo diversi tipi di moti oscillatori. Un punto materiale soggetto unicamente alla forza elastica di una molla, data nello spazio dalla (19) si chiama *oscillatore armonico lineare semplice*. Se, oltre alla forza elastica, sul punto agisce anche una forza viscosa che si oppone al moto, data ad esempio dalla (27), si dice *oscillatore armonico lineare smorzato*. Se sul punto materiale agiscono la forza elastica ed una forza esterna, in generale armonica, si dice *oscillatore armonico lineare forzato* e, se sono presenti sia la forza viscosa che quella esterna, si dice *oscillatore armonico lineare forzato e smorzato*.

Oscillatore armonico lineare semplice. Sia P un punto materiale di massa m sottoposto al campo elastico dato dalla (19) riferita ad un sistema cartesiano ortogonale $O(x, y, z)$. Per semplicità di trattazione, supponiamo che il punto P sia inizialmente posto sull'asse x , con velocità nulle lungo y e lungo z . Le equazioni del moto (8)-(10) danno per questo caso

$$m\ddot{x} = -kx \quad (46)$$

$$m\ddot{y} = -ky \quad (47)$$

$$m\ddot{z} = -kz \quad (48)$$

da risolvere con le condizioni iniziali $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $y(0) = z(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$. La soluzione lungo y e lungo z è immediata: $y(t) = z(t) = 0$, quindi il moto avviene per intero lungo l'asse x . Introducendo la grandezza

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

la (46) diventa

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (49)$$

che è detta *equazione dell'oscillatore armonico* e le sue soluzioni vengono dette *oscillazioni armoniche*. La (49) è un'equazione differenziale del second'ordine lineare omogenea per la funzione $x(t)$, la cui soluzione generale è

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t. \quad (50)$$

Imponendo le condizioni iniziali, abbiamo facilmente

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (51)$$

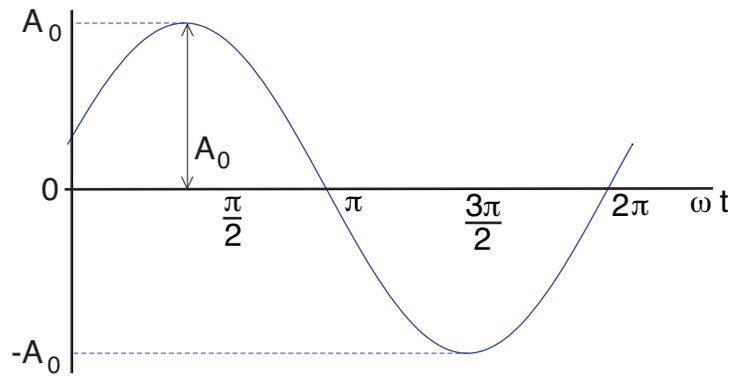


Fig. 4: Oscillazione armonica.

La soluzione (50) può essere posta in una forma che più si presta all'interpretazione fisica ponendo

$$A = A_0 \cos \alpha \quad (52)$$

$$B = A_0 \sin \alpha \quad (53)$$

ottenendo così

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - \alpha), \quad (54)$$

che è illustrata in figura 4. La grandezza A_0 viene detta *ampiezza* dell'oscillazione, che avviene per $-A_0 \leq x \leq A_0$; α viene detta *fase* ed ω_0 *frequenza angolare*. Il *periodo* è $T_0 = 2\pi/\omega_0$ e $\nu = \omega_0/2\pi$ è detta *frequenza* o *pulsazione*. Un'oscillazione armonica è pertanto semplicemente una funzione trigonometrica di dati ampiezza, periodo e fase.

Oscillatore armonico smorzato. Con riferimento sempre alla situazione dell'oscillatore semplice, aggiungiamo ora la forza viscosa (27). Le equazioni del moto (8)-(10) danno

$$m\ddot{x} = -kx - \eta\dot{x} \quad (55)$$

$$m\ddot{y} = -ky - \eta\dot{y} \quad (56)$$

$$m\ddot{z} = -kz - \eta\dot{z} \quad (57)$$

da risolvere con le condizioni iniziali $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $y(0) = z(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$. Nuovamente, la soluzione lungo y e lungo z è immediata: $y(t) = z(t) = 0$ ed il moto avviene lungo l'asse x . La (55), con $2\varepsilon = \eta/m$, diventa

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (58)$$

che è detta *equazione dell'oscillatore armonico smorzato* e le sue soluzioni vengono dette *oscillazioni armoniche smorzate*. La (58) è anch'essa un'equazione differenziale

del second'ordine lineare omogenea per la funzione $x(t)$. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + \omega_0^2 = 0$$

le cui radici sono date da

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega_0^2} \quad (59)$$

Consideriamo, per il momento, la situazione in cui $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Le due radici sono (i) complesse coniugate se $\varepsilon < \omega_0$ e sono (ii) reali se $\varepsilon > \omega_0$. Poniamo

$$\Omega = \sqrt{|\varepsilon^2 - \omega_0^2|}$$

e vediamo separatamente i due casi.

Caso (i): $\varepsilon < \omega_0$. Le due soluzioni indipendenti sono

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\lambda_1 t} = e^{-\varepsilon t + i\Omega t} \\ x_2(t) &= e^{\lambda_2 t} = e^{-\varepsilon t - i\Omega t} \end{aligned}$$

e la soluzione generale dell'equazione dell'oscillatore armonico smorzato è data da

$$x(t) = e^{-\varepsilon t} (A e^{i\Omega t} + B e^{-i\Omega t}) \quad (60)$$

Usando nuovamente le (52)-(53) possiamo scrivere la soluzione nella forma

$$x(t) = A_0 e^{-\varepsilon t} \cos(\Omega t - \alpha), \quad (61)$$

che rappresenta un'oscillazione con frequenza Ω ed ampiezza smorzata nel tempo secondo la legge $A_0 e^{-\varepsilon t}$. L'oscillazione armonica smorzata è illustrata in figura 5; si vede come nel caso in questione, $\varepsilon < \omega_0$, il moto è ancora di tipo oscillatorio, ma con una frequenza più piccola (in quanto $\Omega < \omega_0$) ed un'ampiezza smorzata esponenzialmente nel tempo.

Caso (ii): $\varepsilon > \omega_0$. Le due soluzioni indipendenti sono

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\lambda_1 t} = e^{-\varepsilon t + \Omega t} \\ x_2(t) &= e^{\lambda_2 t} = e^{-\varepsilon t - \Omega t} \end{aligned}$$

e la soluzione generale dell'equazione dell'oscillatore armonico smorzato è data da

$$x(t) = e^{-\varepsilon t} (A e^{\Omega t} + B e^{-\Omega t}) \quad (62)$$

La soluzione non è più di tipo oscillatorio ma di tipo iperbolico e, siccome $\varepsilon > \Omega$, $x(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ ed il sistema può compiere al più un numero finito di

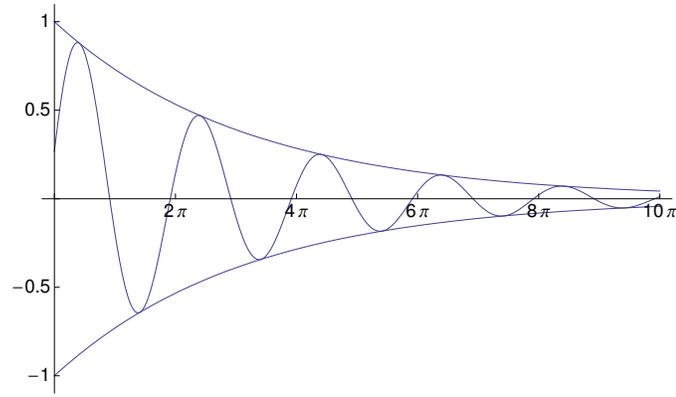


Fig. 5: Oscillazione armonica smorzata.

oscillazioni, per poi tendere a zero senza riattraversare l'origine. Si hanno varie possibilità a seconda delle condizioni iniziali.

DA CONCLUDERE

Oscillatore armonico forzato. Torniamo nuovamente alla situazione dell'oscillatore semplice, aggiungendo questa volta una forza esterna \mathbf{f} , detta forzante, dipendente dal tempo e diretta lungo l'asse x :

$$\mathbf{f}(t) = F \hat{\mathbf{i}} \cos \omega t \quad (63)$$

Le equazioni del moto (8)-(10) danno

$$m\ddot{x} = -kx + F \cos \omega t \quad (64)$$

$$m\ddot{y} = -ky - \eta\dot{y} \quad (65)$$

$$m\ddot{z} = -kz - \eta\dot{z} \quad (66)$$

da risolvere con le condizioni iniziali $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $y(0) = z(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$. Anche in questo caso $y(t) = z(t) = 0$ ed il moto avviene lungo l'asse x . La (64) diventa

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = C \cos \omega t, \quad (67)$$

dove $C = F/m$, che è detta *equazione dell'oscillatore armonico forzato* e le sue soluzioni vengono dette *oscillazioni armoniche forzate*. La (67) è un'equazione del second'ordine, lineare non omogenea. Come il lettore ha imparato nei corsi di Analisi, la soluzione generale è la somma della soluzione generale dell'omogenea associata, $x_h(t)$ e di una soluzione particolare $x_p(t)$. L'equazione omogenea associata alla (67) è l'equazione dell'oscillatore armonico semplice, la cui soluzione è data, ad esempio, dalla (54), quindi

$$x_h(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - \alpha).$$

La soluzione particolare, com'è noto dai corsi di Analisi, va cercata nella forma

$$x_p(t) = b \cos \omega t$$

con b una costante da determinare. Sostituendo nella (67) abbiamo:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) b &= C \\ b &= \frac{C}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

La soluzione generale della (67) è quindi data da

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - \alpha) + \frac{C}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (68)$$

La presenza dell'espressione $\omega_0^2 - \omega^2$ impone la condizione $\omega \neq \omega_0$ per la validità della (68), nel cui caso la soluzione va cercata a parte. La soluzione (68) mostra che il moto è dato dalla sovrapposizione di due oscillazioni, una alla frequenza ω_0 e l'altra alla frequenza imposta dalla forzante, ω . Siccome ω_0 è la frequenza con cui il sistema oscilla in assenza della forzante esterna, ad ω_0 si dà il nome di *frequenza propria*. L'ampiezza dell'oscillazione alla frequenza della forzante è proporzionale ad $1/(\omega_0^2 - \omega^2)$, ed è quindi tanto più grande quanto più vicina è la frequenza imposta ω alla frequenza propria ω_0 . Questo fenomeno, che studieremo ora in maggior dettaglio, viene detto *risonanza*. In condizioni di risonanza, quindi per $\omega \equiv \omega_0$, il sistema oscilla approssimativamente alla frequenza esterna ω , con un'ampiezza molto grande. Questa caratteristica è alla base dell'amplificazione dei segnali.

Vediamo ora come si determina la soluzione quando $\omega = \omega_0$. L'equazione del moto diventa

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = C \cos \omega_0 t. \quad (69)$$

Da un punto di vista matematico, quello che succede è che il termine di non omogeneità, $C \cos \omega_0 t$, diventa esso stesso soluzione dell'equazione omogenea associata. Si può dimostrare che questo causa, in generale, l'insorgenza di *termini secolari*, cioè termini che crescono indefinitamente nel tempo. Nel nostro caso, dobbiamo cercare la soluzione particolare in una forma diversa, del tipo

$$x_p(t) = g(t) \sin \omega_0 t.$$

Derivando una e due volte $x_p(t)$ rispetto al tempo abbiamo

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= \dot{g}(t) \sin \omega_0 t + \omega_0 g(t) \cos \omega_0 t \\ \ddot{x}_p(t) &= \ddot{g}(t) \sin \omega_0 t - \omega_0^2 g(t) \sin \omega_0 t + 2\omega_0 \dot{g}(t) \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

Sostituendo nella (69):

$$\begin{aligned} \ddot{g}(t) \sin \omega_0 t - \omega_0^2 g(t) \sin \omega_0 t + 2\omega_0 \dot{g}(t) \cos \omega_0 t \\ + \omega_0^2 g(t) \sin \omega_0 t &= C \cos \omega_0 t \\ \ddot{g}(t) \sin \omega_0 t + (2\omega_0 \dot{g}(t) - C) \cos \omega_0 t &= 0 \end{aligned}$$

È immediato notare che una funzione $g(t)$ che obbedisca alle equazioni

$$\begin{aligned}\ddot{g}(t) &= 0 \\ 2\omega_0 \dot{g}(t) - C &= 0\end{aligned}$$

fornisce una soluzione della (69). Una tale funzione è, ad esempio, $g(t) = Ct/(2\omega_0)$, che da' la soluzione particolare

$$x_p(t) = \frac{Ct}{2\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

La soluzione generale della (69) è data pertanto da

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - \alpha) + \frac{Ct}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (70)$$

da cui si vede il carattere dell'oscillazione forzata, con un'ampiezza che cresce indefinitamente nel tempo.

Oscillatore armonico smorzato e forzato. Esaminiamo infine la situazione in cui sono presenti sia la forza viscosa (27) sia la forzante (63). Le equazioni del moto (8)-(10) sono ora

$$m\ddot{x} = -kx - \eta\dot{x} + F \cos \omega t \quad (71)$$

$$m\ddot{y} = -ky - \eta\dot{y} \quad (72)$$

$$m\ddot{z} = -kz - \eta\dot{z} \quad (73)$$

da risolvere con le condizioni iniziali $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $y(0) = z(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$. Ancora una volta, $y(t) = z(t) = 0$ ed il moto avviene lungo l'asse x . La (71) diventa

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega_0^2 x = C \cos \omega t, \quad (74)$$

dove $2\varepsilon = \eta/m$ e $C = F/m$, ed è un'equazione del second'ordine, lineare non omogenea. L'equazione omogenea associata è l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato (58), che noi ora considereremo soltanto nel caso $\omega_0 < \varepsilon$, così che il moto del sistema non forzato è di tipo oscillatorio. La soluzione dell'equazione omogenea associata è data pertanto dalla (61). Per determinare la soluzione particolare, essa va cercata nella forma

$$x_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

Calcoliamo le derivate prime e seconde di questa espressione:

$$\dot{x}_p(t) = \omega(-a \sin \omega t + b \cos \omega t)$$

$$\ddot{x}_p(t) = \omega^2(-a \cos \omega t - b \sin \omega t)$$

Sostituendo nell'equazione (74) abbiamo:

$$\begin{aligned} & \omega^2 (-a \cos \omega t - b \sin \omega t) \\ & + 2\varepsilon \omega (-a \sin \omega t + b \cos \omega t) \\ & + \omega_0^2 (a \cos \omega t + b \sin \omega t) = C \cos \omega t \end{aligned}$$

Equagliando separatamente i coefficienti di $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$ otteniamo il sistema di due equazioni per a e b :

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) a + 2\varepsilon \omega b &= C \\ -2\varepsilon \omega a + (\omega_0^2 - \omega^2) b &= 0 \end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$\begin{aligned} a &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2} C \\ b &= \frac{2\varepsilon \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2} C \end{aligned}$$

La soluzione generale della (74) è pertanto data da

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 e^{-\varepsilon t} \cos(\Omega t - \alpha) \\ &+ \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\varepsilon \omega \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2}, \end{aligned} \quad (75)$$

dove $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}$. La soluzione dell'equazione rappresenta dunque una sovrapposizione di un'oscillazione smorzata alla frequenza Ω e di un'oscillazione non smorzata alla frequenza esterna ω . Per tempi lunghi, l'oscillazione smorzata tende a zero e rimane in vita soltanto l'oscillazione alla frequenza della forzante. L'oscillazione smorzata, in questo caso, viene anche detta *transiente*. L'ampiezza dell'oscillazione alla frequenza della forzante è data da

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{C}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2}} \quad (76)$$

ed è illustrata in figura 6, dove l'ampiezza è mostrata in funzione di ω per diversi valori del coefficiente di smorzamento ε .

7 Grandezze dinamiche e leggi di conservazione

Grandezze dinamiche. Introduciamo qui alcune altre quattro grandezze, che chiameremo *grandezze dinamiche fondamentali*. Sia P un punto di massa m e siano \mathbf{r} , \mathbf{v} e \mathbf{a} la sua posizione, velocità ed accelerazione, definite rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio $O(x, y, z)$. Definiamo allora:

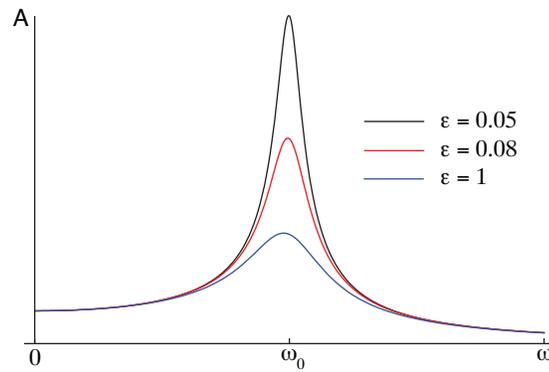


Fig. 6: Curve di risonanza.

(i) la *quantità di moto* o *momento lineare*

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}; \quad (77)$$

(ii) il *momento angolare*

$$\mathbf{K}(O) = (P - O) \times \mathbf{p}; \quad (78)$$

(iii) l'*energia cinetica*

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}; \quad (79)$$

Introduciamo inoltre:

(i) il *momento della forza*

$$\mathbf{N}(O) = (P - O) \times \mathbf{F}; \quad (80)$$

(ii) la *potenza*

$$W = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}; \quad (81)$$

(iii) nel caso che sul punto P agisca una forza conservativa, introduciamo anche l'*energia totale meccanica*

$$E = T + V. \quad (82)$$

dove $V = -U$ è detta *energia potenziale*, con U il potenziale del campo introdotto nella (15).

Evoluzione. Tutte queste grandezze dinamiche sono funzioni della posizione e della velocità del punto P istante per istante, e sono quindi definite nello spazio delle

fasi. Vengono pertanto anche dette *funzioni di fase* o *grandezze di fase*. L'evoluzione temporale delle grandezze dinamiche fondamentali è governata da equazioni differenziali che si ricavano facilmente dalle equazioni del moto di Newton:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} = \frac{dm\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}(O)}{dt} &= \dot{\mathbf{K}}(O) = \frac{d(P-O)}{dt} \times \mathbf{p} + (P-O) \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \\ &= (P-O) \times \mathbf{F} = \mathbf{N}(O) \end{aligned} \quad (84)$$

$$\frac{dT}{dt} = m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = W \quad (85)$$

La (83) è equivalente all'equazione del moto (11) nel caso in cui la massa m è costante. Essa rimane tuttavia valida anche quando la massa è variabile, e costituisce in tal caso l'equazione del moto, permettendo così di descrivere la dinamica dei sistemi a massa variabile (l'esempio più importante sono i razzi con motore a reazione).

Notiamo inoltre che, nel definire il momento angolare, abbiamo scelto come centro di riduzione l'origine del sistema di riferimento. In generale, il momento angolare può essere definito rispetto ad un punto qualsiasi, non necessariamente fermo. Sia, ad esempio, A il centro di riduzione, e sia \mathbf{v}_A la sua velocità. Abbiamo allora:

$$\mathbf{K}(A) = (P-A) \times \mathbf{p}; \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}(A) &= \frac{d(P-A)}{dt} \times \mathbf{p} + (P-A) \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \\ &= -\mathbf{v}_A \times \mathbf{p} + (P-A) \times \mathbf{F} = \mathbf{N}(A) - m\mathbf{v}_A \times \mathbf{v} \end{aligned} \quad (87)$$

Da notare che $\dot{\mathbf{K}}(A) = \mathbf{N}(A)$ se $\mathbf{v}_A = 0$ oppure se \mathbf{v}_A è parallela a \mathbf{v} .

Leggi di conservazione. Quando la forza che agisce sul punto materiale possiede determinate proprietà, le funzioni di fase obbediscono a delle leggi di conservazione. Quando una grandezza di fase si conserva durante il moto, si dice che è un *integrale primo del moto* o una *costante del moto*. Vediamo, in ordine, la conservazione della quantità di moto, del momento angolare e dell'energia.

Conservazione del momento lineare. Sia $\hat{\mathbf{e}}$ un versore, \mathbf{F} la forza e sia $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0$. Abbiamo allora, usando la (83),

$$\frac{d(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}})}{dt} = \dot{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0.$$

In particolare, se $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{i}}$, abbiamo che $F_x = 0$ e quindi $p_x = 0$, ed analogamente per p_y e p_z . Se tutte le componenti della forza, F_x, F_y, F_z sono nulle, cioè $\mathbf{F} = 0$, abbiamo che $\dot{\mathbf{p}} = 0$, quindi \mathbf{p} è una costante del moto.

Conservazione del momento angolare. Sia $\hat{\mathbf{e}}$ un versore, \mathbf{F} la forza e sia $\mathbf{N}(O) \cdot$

$\hat{\mathbf{e}} = 0$. Abbiamo allora, usando la (84),

$$\frac{d(\mathbf{K}(O) \cdot \hat{\mathbf{e}})}{dt} = \dot{\mathbf{K}}(O) \cdot \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{N}(O) \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0.$$

In particolare, se $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{i}}$, abbiamo che $N_x = 0$ e quindi $K_x(O) = 0$, ed analogamente per $K_y(O)$ e $K_z(O)$. Se tutte le componenti del momento della forza, N_x, N_y, N_z sono nulle, cioè $\mathbf{N}(O) = 0$, abbiamo che $\dot{\mathbf{K}}(O) = 0$, quindi $\mathbf{K}(O)$ è una costante del moto.

Conservazione dell'energia cinetica. Dalla (85) vediamo che la conservazione dell'energia cinetica è legata all'annullarsi della potenza. Questo può avvenire se $\mathbf{F} = 0$, ma anche se \mathbf{F} è perpendicolare alla velocità. La conservazione dell'energia cinetica segue quindi banalmente dalla (85).

Conservazione dell'energia totale. Sia \mathbf{F} un campo di forze conservativo in una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Siano $A, B \in \Omega$ due punti arbitrari del dominio e sia L_{AB} il lavoro compiuto dal campo lungo una traiettoria γ che congiunge A e B . Dalla (17) abbiamo allora

$$L_{AB}(\gamma) = U(B) - U(A) = V(A) - V(B) \quad (88)$$

Se indichiamo con t_A e t_B gli istanti temporali nei quali il punto P si trova rispettivamente in A ed in B sulla traiettoria, il lavoro lungo γ può essere espresso anche da

$$L_{AB}(\gamma) = \int_{A,\gamma}^B \mathbf{F} \cdot dP = \int_{t_A,\gamma}^{t_B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \quad (89)$$

$$= \int_{t_A,\gamma}^{t_B} W dt = \int_{t_A,\gamma}^{t_B} \dot{T} dt = T(t_B) - T(t_A) \quad (90)$$

Uguagliando le due espressioni (88) e (90) otteniamo la conservazione dell'energia totale meccanica

$$T(t_A) + V(t_A) = T(t_B) + V(t_B) \equiv E \quad (91)$$

che, per l'arbitrarietà di A e B vale lungo tutta la traiettoria. La (91) esprime la conservazione dell'energia totale meccanica: in presenza di un campo conservativo, l'energia totale meccanica si conserva durante il moto, ovvero è un integrale primo del moto.

La dimostrazione che abbiamo appena esposto è basata sull'integrale del lavoro. Alla conservazione dell'energia si può pervenire anche per via differenziale:

$$\dot{E} = \dot{T} + \dot{V} = W + \nabla V \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{F} - \nabla U) \cdot \mathbf{v} = 0$$

Esempi. Applichiamo i teoremi di conservazione appena visti agli esempi dei moti oscillatori e della caduta dei gravi, che abbiamo trattato nella sezione precedente.

Moto in un campo gravitazionale generale. Consideriamo il campo gravitazionale dato dalla (21):

$$\mathbf{F} = -G \frac{M m}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r = -G M m \frac{P - O}{|P - O|^3}.$$

Abbiamo visto che esso è conservativo ed inoltre si vede facilmente che

$$\mathbf{N}(O) = (P - O) \times \mathbf{F} = 0.$$

Ne seguono la conservazione dell'energia totale e del momento angolare di un punto di massa m che si muova in tale campo.

Moto di un grave nel vuoto. L'espressione della forza di gravità (24) valida nelle vicinanze della superficie terrestre è quella di un campo conservativo; è nulla la componente del momento lungo z e sono inoltre nulle le componenti di \mathbf{F}_g lungo le direzioni dell'asse x e dell'asse y . Pertanto si conservano l'energia totale, la componente z del momento angolare e le componenti lungo x e lungo y del momento lineare. Con riferimento alla soluzione delle equazioni del moto ottenute nel paragrafo 5, abbiamo:

$$\begin{aligned} E = T + V &= \frac{1}{2} m v^2 + m g z = \frac{1}{2} m (\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m g z = \\ &= \frac{1}{2} m [v_0^2 \cos^2 \alpha + (-g t + v_0 \sin \alpha)^2] + m g \left(-g \frac{t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 \end{aligned}$$

che è l'energia iniziale. La componente del momento angolare lungo z è nulla, come si verifica facilmente dal fatto che $\dot{x}(t) = x(t) = 0$. Per le componenti della quantità di moto lungo x e lungo y abbiamo:

$$\begin{aligned} m v_x(t) &= 0 \\ m v_y(t) &= m v_0 \cos \alpha, \end{aligned}$$

pari al loro valore iniziale.

Oscillatore armonico semplice. La forza elastica \mathbf{F}_k , data dalla (19), è conservativa e quindi l'energia totale si conserva. Verifichiamolo, facendo uso della soluzione

delle equazioni del moto (54) e della sua derivata temporale:

$$\begin{aligned} E = T + V &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) \\ &= \frac{1}{2} m A_0^2 [\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t - \alpha) + \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t - \alpha)] = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 \end{aligned}$$