Angoli di Eulero

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Gli **angoli di Eulero** sono stati introdotti per descrivere l'orientamento di un corpo rigido nello spazio.

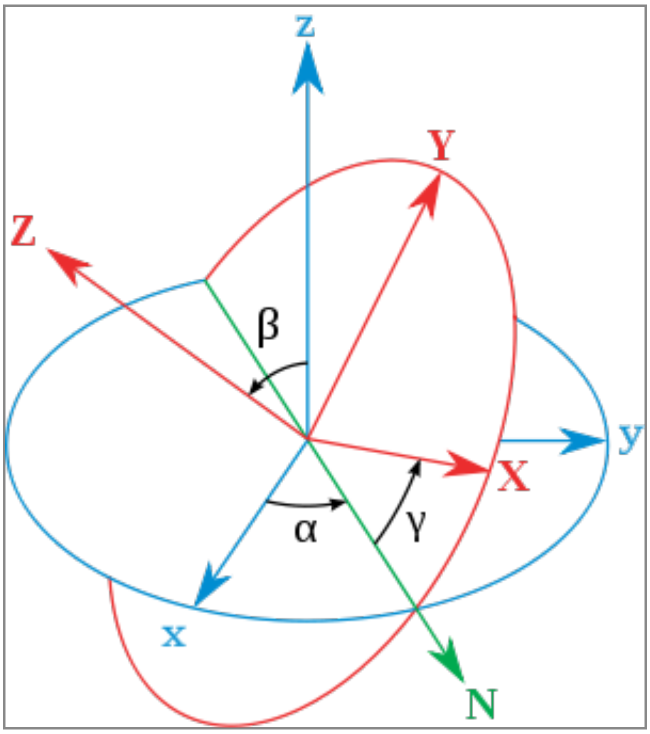
Indice

Definizione

Gli angoli di Eulero descrivono la posizione di un sistema di riferimento *XYZ* solidale con un corpo rigido attraverso una serie di rotazioni a partire da un sistema di riferimento fisso *xyz*. I due sistemi di riferimento coincidono nell'origine.

Se i piani *xy* e *XY* sono distinti, si intersecano in una retta (passante per l'origine) detta *linea dei nodi* (*N*). Se i piani coincidono, si definisce la linea dei nodi *N* come l'asse *X*. Gli angoli di Eulero sono i tre angoli seguenti:

- α è l'angolo tra l'asse *x* e la linea dei nodi. Detto angolo di *precessione*, è definito in $[0, 2\pi[$ oppure in $[-\pi, \pi[$;
- β è l'angolo tra gli assi *z* e *Z*. Detto angolo di *nutazione*, è definito in $[0, \pi]$ oppure in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- γ è l'angolo tra la linea dei nodi e l'asse *X*. Detto angolo di *rotazione propria*, è definito in $[0, 2\pi[$ oppure in $[-\pi, \pi[$.



Angoli di Eulero - Il sistema fisso (*xyz*) è rappresentato in blu, e il sistema ruotato (*XYZ*) è rappresentato in rosso. La linea dei nodi, indicata con *N*, è rappresentata in verde.

Significato algebrico

Dal punto di vista dell'algebra lineare il passaggio dal sistema di riferimento fisso *xyz* a quello ruotato *XYZ* equivale ad operare un cambiamento di base, ovvero passare da una base $(\widehat{e_1}, \widehat{e_2}, \widehat{e_3})$ (con $\widehat{e_1}$, $\widehat{e_2}$ ed $\widehat{e_3}$ rispettivamente i versori degli assi *x*, *y* e *z*) ad una $\left(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\right)$ (ovvero i versori degli assi *X*, *Y* e *Z*) tramite una matrice di cambiamento di base A. La matrice A è una matrice quadrata 3×3 ortogonale che rappresenta una rotazione nello spazio.

Gli angoli di Eulero permettono di rappresentare A in forma relativamente semplice come moltiplicazione di 3 matrici di rotazione lungo i tre assi x, y e z. In altre parole, la rotazione descritta da A può essere effettuata in tre passi distinti:

1. Rotazione intorno all'asse z di un angolo α, facendo così coincidere l'asse x con N. Ciò comporterà un cambiamento di base $(\widehat{e_1}, \widehat{e_2}, \widehat{e_3}) \longrightarrow (\widehat{e_1}', \widehat{e_2}', \widehat{e_3}')$, con $\widehat{e_1}' \equiv \hat{n}$ ed $\widehat{e_3}' \equiv \widehat{e_3}$, avendo chiamato $\hat{n}$ il versore della linea dei nodi. La matrice di rotazione sarà:
$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Rotazione intorno all'asse N di un angolo β, con un conseguente cambio di base $\left(\hat{n}, \widehat{e_2}', \widehat{e_3}\right) \longrightarrow (\hat{n}, \widehat{e_2}'', \widehat{e_3}'')$. Stavolta la matrice di rotazione sarà:
$$R_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$
3. Rotazione intorno all'asse Z di un angolo γ. Il cambiamento di base sarà $(\hat{n}, \widehat{e_2}'', \widehat{e_3}'') \longrightarrow \left(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\right)$, con $\hat{k} \equiv \widehat{e_3}''$, e la matrice di rotazione:
$$R_\gamma = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il cambiamento di base sopra descritto si può formalizzare come:

$$\begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} = R_\gamma R_\beta R_\alpha \begin{pmatrix} \widehat{e_1} \\ \widehat{e_2} \\ \widehat{e_3} \end{pmatrix}$$

mentre il passaggio inverso:

$$\begin{pmatrix} \widehat{e_1} \\ \widehat{e_2} \\ \widehat{e_3} \end{pmatrix} = (R_\gamma R_\beta R_\alpha)^T \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} = R_\alpha^T R_\beta^T R_\gamma^T \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

Occorre puntualizzare che la sequenza descritta in questa sezione è solo una delle 12 possibili per operare il cambiamento di base indicato. Dal nome degli assi intorno ai quali si sono effettuate le singole rotazioni, essa prende il nome di *ZXZ*. Le altre possibili sono *XZX*, *XYX*, *YXY*, *YZY*, *ZYZ*, *XZY*, *XYZ*, *YXZ*, *YZX*, *ZYX* e *ZXY*. Le 12 sequenze sono ottenute tramite tutte le permutazioni possibili con gli assi uguali non consecutivi.

Una particolare variante degli angoli di Eulero, usata in aeronautica e in robotica, è quella degli angoli di Tait-Bryan. In questo caso gli angoli α, β e γ prendono il nome, rispettivamente, di angoli di rollio, beccheggio e imbardata.

Altri progetti

- **Wikimedia Commons** contiene file multimediali su **Angoli di Eulero**

Collegamenti esterni

- Gli angoli di Eulero (http://www1.unifi.it/detmod/upload/sub/Borgioli/Fisica-Matematica/Appunti_Fismat_IEL.pdf)
- Gli angoli di Eulero in spazi di dimensione superiore (http://ansi.altervista.org)

Categoria: Geometria solida

- Ultima modifica per la pagina: 20:50, 30 giu 2010.