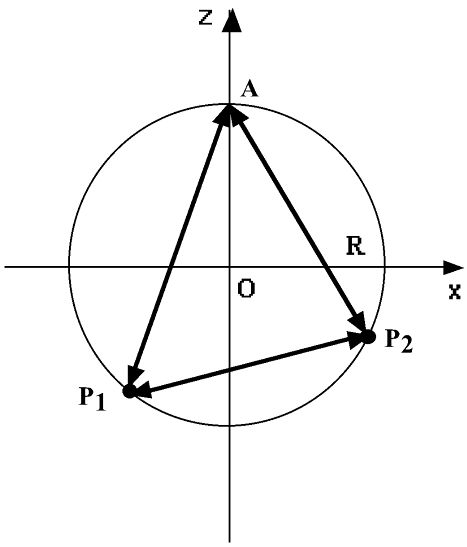
Esercizio

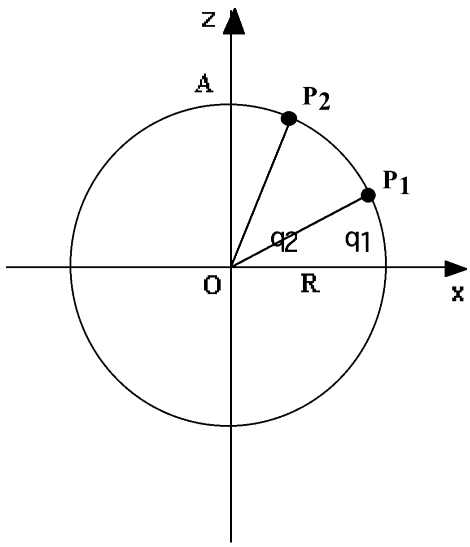
Due punti materiali P_1 e P_2, di ugual massa m, sono vincolati a muoversi sulla circonferenza di centro l'origine e raggio R nel piano verticale $O(x, z)$. Sia A il punto piu' alto dove la circonferenza incontra l'asse z. Sui due punti, oltre alla forza peso, agiscono tre molle di ugual costante elastica $c > 0$, che collegano i due punti P_1 e P_2 con il punto A e tra di loro, rispettivamente (vedi figura).



1. Scrivere l'energia cinetica T del sistema;
2. scrivere l'energia potenziale V del sistema;
3. scrivere le equazioni di Lagrange;
4. integrare parzialmente le equazioni di Lagrange ricavando la conservazione dell'energia;
5. calcolare le posizioni di equilibrio;
6. studiare la stabilita' delle posizioni di equilibrio trovate.

Svolgimento

Il sistema ha due gradi di liberta'.



Si scelgano come coordinate Lagrangiane gli angoli θ_1 e θ_2 che i vettori $P_1 - O$ e $P_2 - O$ formano con l'asse x, rispettivamente (vedi figura). Risulta allora:

$$P_1 - O = R\,(\hat{\mathbf{i}}\cos\theta_1 + \hat{\mathbf{k}}\sin\theta_1) \quad (1)$$
$$P_2 - O = R\,(\hat{\mathbf{i}}\cos\theta_2 + \hat{\mathbf{k}}\sin\theta_2) \quad (2)$$

per i vettori posizione,

$$\mathbf{v}_1 = R\,\dot{\theta}_1\,(-\hat{\mathbf{i}}\sin\theta_1 + \hat{\mathbf{k}}\cos\theta_1)$$
$$\mathbf{v}_2 = R\,\dot{\theta}_2\,(-\hat{\mathbf{i}}\sin\theta_2 + \hat{\mathbf{k}}\cos\theta_2)$$

per le velocita' e

$$\mathbf{a}_1 = R\,\ddot{\theta}_1\,(-\hat{\mathbf{i}}\sin\theta_1 + \hat{\mathbf{k}}\cos\theta_1) - R\,\dot{\theta}_1^{\,2}\,(\hat{\mathbf{i}}\cos\theta_1 + \hat{\mathbf{k}}\sin\theta_1)$$
$$\mathbf{a}_2 = R\,\ddot{\theta}_2\,(-\hat{\mathbf{i}}\sin\theta_2 + \hat{\mathbf{k}}\cos\theta_2) - R\,\dot{\theta}_2^{\,2}\,(\hat{\mathbf{i}}\cos\theta_2 + \hat{\mathbf{k}}\sin\theta_2)$$

per le accelerazioni.

1) L'energia cinetica del sistema e' data da:

$$T = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Siccome i due punti si muovono di moto circolare, abbiamo che $v_1 = R\,\dot\theta_1$ e $v_2 = R\,\dot\theta_2$, cosi' che

$$T = \frac{1}{2} m R^2 (\dot\theta_1^{\,2} + \dot\theta_2^{\,2}) \tag{3}$$

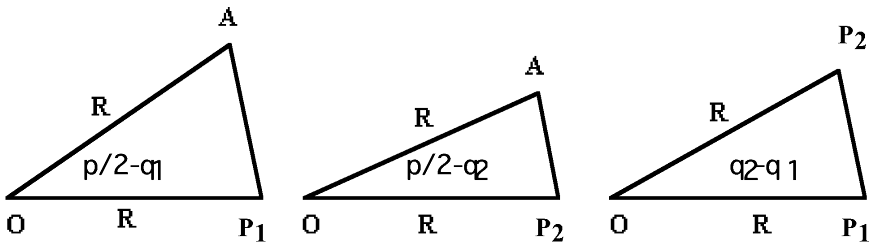
2) L'energia potenziale e' data da:

$$V = mgz_1 + mgz_2 + \frac{1}{2}\,c\,(\overline{AP_1}^2 + \overline{AP_2}^2 + \overline{P_1P_2}^2).$$

Dalle equazioni (1) e (2) abbiamo

$$\begin{aligned} z_1 &= R\,\sin\theta_1 \\ z_2 &= R\,\sin\theta_2. \end{aligned}$$

Usando il Teorema di Carnot (vedi figura), inoltre,



$$\begin{aligned} \overline{AP_1}^2 &= 2R^2(1-\cos(\frac{\pi}{2}-\theta_1)) = 2R^2(1-\sin\theta_1) \\ \overline{AP_2}^2 &= 2R^2(1-\cos(\frac{\pi}{2}-\theta_2)) = 2R^2(1-\sin\theta_2) \\ \overline{P_1P_2}^2 &= 2R^2(1-\cos(\theta_2-\theta_1)). \end{aligned}$$

L'energia potenziale diventa dunque:

$$V = mgR\,(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) + \frac{1}{2}c\,(2R^2)\,(3 - \sin\theta_1 - \sin\theta_2 - \cos(\theta_2-\theta_1))$$

che, eliminando le costanti e raggruppando i termini, diventa

$$V = R(mg - cR)\,(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) - c\,R^2\,\cos(\theta_2-\theta_1) \tag{4}$$

3) La Lagrangiana e' data da:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}_1^{\,2} + \dot{\theta}_2^{\,2}) + R\,(cR - mg)\,(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) + c\,R^2\ \cos(\theta_2 - \theta_1))$$

e le sue derivate sono:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= R(cR - mg)\cos\theta_1 + \ c\,R^2\ \sin(\theta_2 - \theta_1) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} &= mR^2\,\dot{\theta}_1 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} &= R(cR - mg)\cos\theta_2 - \ c\,R^2\ \sin(\theta_2 - \theta_1) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} &= mR^2\,\dot{\theta}_2.
\end{aligned}$$

Le equazioni di Lagrange sono dunque:

$$mR^2\,\ddot{\theta}_1 + R(mg - cR)\ \cos\theta_1 - \ c\,R^2\ \sin(\theta_2 - \theta_1) = 0 \tag{5}$$

$$mR^2\,\ddot{\theta}_2 + R(mg - cR)\ \cos\theta_2 + \ c\,R^2\ \sin(\theta_2 - \theta_1) = 0 \tag{6}$$

4) Moltiplicando (**??**) e (**??**) rispettivamente per $\dot{\theta}_1$ e per $\dot{\theta}_2$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
mR^2\,\ddot{\theta}_1\dot{\theta}_1 + R(mg - cR)\,\dot{\theta}_1\cos\theta_1 - \ c\,R^2\,\dot{\theta}_1\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0 \\
mR^2\,\ddot{\theta}_2\dot{\theta}_2 + R(mg - cR)\,\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + \ c\,R^2\,\dot{\theta}_2\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0.
\end{aligned}$$

Sommando le due equazioni otteniamo:

$$mR^2\,(\ddot{\theta}_1\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\dot{\theta}_2) + R(mg - cR)\,(\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2)\cos\theta_2 + c\,R^2\,(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

che, integrata rispetto al tempo, offre:

$$\frac{d}{dt}\left\{ mR^2\left(\frac{\dot{\theta}_1^{\,2}}{2} + \frac{\dot{\theta}_2^{\,2}}{2}\right) + R(mg - cR)\,(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) - cR^2\cos(\theta_2 - \theta_1)\right\} = 0$$

Come appare dalle (??) e (??), nell'espressione in parentesi graffa si riconosce l'energia totale del sistema, $E = T + V$.

5) Calcoliamo le derivate prime dell'energia potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = R(mg - cR)\cos\theta_1 - cR^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \tag{7}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = R(mg - cR)\cos\theta_2 + cR^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \tag{8}$$

Le configurazioni di equilibrio si ottengono uguagliando a zero le (??) e (??):

$$\begin{cases} R(mg - cR)\cos\theta_1 - cR^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = 0 \\ R(mg - cR)\cos\theta_2 + cR^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Sommando le due equazioni del sistema (??) si ottiene

$$R(mg - cR)(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) = 0 \tag{10}$$

le cui soluzioni vanno poi sostituite in una delle due equazioni del sistema (??) per ottenere le soluzioni complete. L'equazione (??) puo' essere soddisfatta da (A) $mg - cR = 0$ o da (B) $\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 0$.

Esaminiamo prima il caso (A). Con $mg = cR$ le equazioni del sistema (??) si riducono a

$$\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0,$$

ovvero $\theta_2 = \theta_1$ oppure $\theta_2 = \pi + \theta_1$. Otteniamo percio' due famiglie di configurazioni di equilibrio, $\Gamma_1 = (\theta_1, \theta_1)$ e $\Gamma_2 = (\theta_1, \pi + \theta_1)$ con θ_1 arbitrario.

Esaminiamo ora il caso (B). Dall'equazione $\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 0$ otteniamo che
(B1) $\theta_2 = \pi - \theta_1$ oppure (B2) $\theta_2 = \pi + \theta_1$.

Esaminiamo prima il caso (B1). Sostituendo $\theta_2 = \pi - \theta_1$ nella prima delle (??) abbiamo:

$$\begin{aligned} &R(mg - cR)\cos\theta_1 - cR^2 \sin(\pi - 2\theta_1) = 0 \\ &(mg - cR)\cos\theta_1 - cR\sin(2\theta_1) = 0 \\ &(mg - cR)\cos\theta_1 - 2cR\sin\theta_1\cos\theta_1 = 0 \\ &\cos\theta_1\,(mg - cR - 2cR\sin\theta_1) = 0. \end{aligned}$$

Quest'ultima equazione e' soddisfatta per (B11) $\cos\theta_1 = 0$ oppure per
(B12) $mg - cR + 2cR\sin\theta_1 = 0$.

(B11) $\theta_1 = \pi/2$, oppure $\theta_1 = 3\pi/2$. Nel primo caso $\theta_2 = \pi/2$, nel secondo $\theta_2 = -\pi/2$ ovvero $\theta_2 = 3\pi/2$. Le nuove configurazioni di equilibrio sono dunque $\Gamma_3 = (\pi/2, \pi/2)$ e $\Gamma_4 = (3\pi/2, 3\pi/2)$.

(B12) $\sin\theta_1 = (cR - mg)/(2cR)$, che esiste per $|cR - mg|/(2cR) \leq 1$, o anche (dopo qualche passaggio) $cR > mg/3$. Sia $\theta_0 = \sin^{-1}(cR - mg)/(2cR)$ appartenente al I quadrante (se $cR - mg > 0$) o al IV quadrante (se $cR - mg < 0$). Abbiamo allora $\theta_1 = \theta_0$ e $\theta_1 = \pi - \theta_0$, che danno $\theta_2 = \pi - \theta_0$ e $\theta_2 = \theta_0$, rispettivamente. Le configurazioni di equilibrio che corrispondono a queste soluzioni sono $\Gamma_5 = (\theta_0, \pi - \theta_0)$ e $\Gamma_6 = (\pi - \theta_0, \theta_0)$.

Esaminiamo ora il caso (B2). Sostituendo $\theta_2 = \pi + \theta_1$ nella prima delle (**??**) abbiamo:

$$R(mg - cR)\cos\theta_1 - cR^2\sin\pi = 0$$

ovvero $\cos\theta_1 = 0$, vale a dire $\theta_1 = \pi/2$ oppure $\theta_1 = 3\pi/2$, che danno $\theta_2 = 3\pi/2$ e $\theta_2 = 5\pi/2$, ovvero $\theta_2 = \pi/2$ rispettivamente. Le corrispondenti configurazioni di equilibrio sono dunque $\Gamma_7 = (\pi/2, 3\pi/2)$ e $\Gamma_8 = (3\pi/2, \pi/2)$.

Riassumendo, abbiamo trovato otto configurazioni di equilibrio,

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= (\theta_1, \theta_1), \ \ \theta_1 \text{ arbitrario,} \\
\Gamma_2 &= (\theta_1, \pi + \theta_1), \ \ \theta_1 \text{ arbitrario,} \\
\Gamma_3 &= (\pi/2, \pi/2) \\
\Gamma_4 &= (3\pi/2, 3\pi/2) \\
\Gamma_5 &= (\theta_0, \pi - \theta_0) \\
\Gamma_6 &= (\pi - \theta_0, \theta_0) \\
\Gamma_7 &= (\pi/2, 3\pi/2) \\
\Gamma_8 &= (3\pi/2, \pi/2)
\end{aligned}$$

Le configurazioni Γ_1 e Γ_2 rappresentano due famiglie ad un parametro di equilibri ed esistono nel caso in cui $mg = cR$. Le configurazioni Γ_5 e Γ_6 esistono solo se $cR > mg/3$ e con $\theta_0 = \sin^{-1}(cR - mg)/(2cR)$ (determinazione del I o del IV quadrante).

6) Calcoliamo le derivate seconde dell'energia potenziale:

$$V_{11} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} = R(cR - mg)\sin\theta_1 + cR^2\cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (11)$$

$$V_{22} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} = R(cR - mg)\sin\theta_2 + cR^2\cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (12)$$

$$V_{12} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \theta_2} = -cR^2\cos(\theta_2 - \theta_1). \quad (13)$$

La stabilita' delle otto configurazioni di equilibrio trovate discende dallo studio delle matrici Hessiane corrispondenti a ciascun equilibrio.

Per Γ_1 (ricordiamo che $cR = mg$ in questo caso) abbiamo $V_{11}(\Gamma_1) = V_{22}(\Gamma_1) = -V_{12}(\Gamma_1) = cR^2$ e la matrice Hessiana e'

$$H_1 = H(\Gamma_1) = \begin{pmatrix} cR^2 & -cR^2 \\ -cR^2 & cR^2 \end{pmatrix}$$

con $\det(H_1) = 0$, e quindi Γ_1 non e' stabile.

Per Γ_2 (anche in questo caso $cR = mg$) abbiamo $V_{11}(\Gamma_2) = V_{22}(\Gamma_2) = -V_{12}(\Gamma_2) = -cR^2$. La matrice Hessiana e'

$$H_2 = H(\Gamma_2) = \begin{pmatrix} -cR^2 & cR^2 \\ cR^2 & -cR^2 \end{pmatrix}$$

Gli elementi diagonali sono negativi e $\det(H_2) = 0$; quindi anche Γ_2 non e' stabile.

Per Γ_3 abbiamo $V_{11}(\Gamma_3) = V_{22}(\Gamma_3) = 2cR^2 - mgR$ e $V_{12}(\Gamma_3) = -cR^2$. La matrice Hessiana e'

$$H_3 = H(\Gamma_3) = \begin{pmatrix} 2cR^2 - mgR & -cR^2 \\ -cR^2 & 2cR^2 - mgR \end{pmatrix}$$

con $\det(H_3) = (2cR^2 - mgR)^2 - c^2R^4$. La configurazione di equilibrio e' dunque stabile se

$$\begin{cases} 2cR^2 - mgR & > 0 \\ (2cR^2 - mgR)^2 - c^2R^4 & > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2cR^2 - mgR & > 0 \\ 2cR^2 - mgR & > cR^2 \end{cases}$$

ovvero Γ_3 e' stabile per $cR > mg$.

Per Γ_4 abbiamo $V_{11}(\Gamma_4) = V_{22}(\Gamma_4) = mgR$ e $V_{12}(\Gamma_4) = -cR^2$. La matrice Hessiana e'

$$H_4 = H(\Gamma_4) = \begin{pmatrix} mgR & -cR^2 \\ -cR^2 & mgR \end{pmatrix}$$

con $\det(H_4) = (mgR)^2 - c^2R^4$. La configurazione di equilibrio e' dunque stabile se $(mgR)^2 - c^2R^4 > 0$, ovvero $mg > cR$.

Per Γ_5 abbiamo

$$\begin{aligned} V_{11}(\Gamma_5) &= R(cR - mg)\sin\theta_0 + cR^2\cos(\pi - 2\theta_0) = \\ &= R(cR - mg)\sin\theta_0 - cR^2\cos(2\theta_0) = V_{22}(\Gamma_5) \\ V_{12}(\Gamma_5) &= -cR^2\cos(\pi - 2\theta_0) = \\ &= cR^2\cos(2\theta_0) \end{aligned}$$

e la matrice Hessiana e'

$$H_5 = H(\Gamma_5) = \begin{pmatrix} R(cR - mg)\sin\theta_0 - cR^2\cos(2\theta_0) & cR^2\cos(2\theta_0) \\ cR^2\cos(2\theta_0) & R(cR - mg)\sin\theta_0 - cR^2\cos(2\theta_0) \end{pmatrix}$$

con determinante $\det(H_5) = [R(cR - mg)\sin\theta_0 - cR^2\cos(2\theta_0)]^2 - c^2R^4cos^2(2\theta_0)$. La configurazione di equilibrio e' dunque stabile se

$$\begin{cases} R(cR - mg)\sin\theta_0 - cR^2\cos(2\theta_0) & > 0 \\ [R(cR - mg)\sin\theta_0 - cR^2\cos(2\theta_0)]^2 - c^2R^4cos^2(2\theta_0) & > 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} R(cR - mg)\sin\theta_0 - cR^2\cos(2\theta_0) & > 0 \\ R^2(cR - mg)^2\sin^2\theta_0 - 2cR^3(cR - mg)\cos(2\theta_0)\sin\theta_0 & > 0 \end{cases}$$

Sostituendo $cR - mg = 2cR\sin\theta_0$, il sistema si riduce a

$$\begin{cases} 4\sin^2\theta_0 - 1 & > 0 \\ 3\sin^4\theta_0 - \sin^2\theta_0 & > 0 \end{cases}$$

la cui soluzione e' $\sin^2\theta_0 > 1/3$, ovvero, dopo qualche passaggio, $cR < mg\sqrt{3}/(\sqrt{3} + 2)$. Aggiungendo la condizione di esistenza della configurazione di equilibrio Γ_5, otteniamo $mg/3 < cR < mg\sqrt{3}/(\sqrt{3} + 2)$ per la stabilita' di Γ_5.

Gli elementi della matrice Hessiana per Γ_6 sono gli stessi di Γ_5 e quindi valgono le stesse considerazioni.

Per Γ_7 abbiamo

$$\begin{aligned} V_{11}(\Gamma_7) &= R(cR-mg)-cR^2=-mgR \\ V_{22}(\Gamma_7) &= R(mg-cR)-cR^2=mgR-2cR^2 \\ V_{12}(\Gamma_7) &= cR^2 \end{aligned}$$

e la matrice Hessiana e'

$$H_7 = H(\Gamma_7) = \begin{pmatrix} -mgR & cR^2 \\ cR^2 & mgR-2cR^2 \end{pmatrix}$$

Essendo uno degli elementi sulla diagonale negativo, la configurazione di equilibrio Γ_7 e' instabile.

Per Γ_8 abbiamo

$$\begin{aligned} V_{11}(\Gamma_8) &= R(mg-cR)-cR^2=mgR-2cR^2 \\ V_{22}(\Gamma_8) &= R(cR-mg)-cR^2=-mgR \\ V_{12}(\Gamma_8) &= cR^2 \end{aligned}$$

e la matrice Hessiana e'

$$H_8 = H(\Gamma_8) = \begin{pmatrix} mgR-2cR^2 & cR^2 \\ cR^2 & -mgR \end{pmatrix}$$

Essendo uno degli elementi sulla diagonale negativo, anche la configurazione di equilibrio Γ_8 e' instabile.