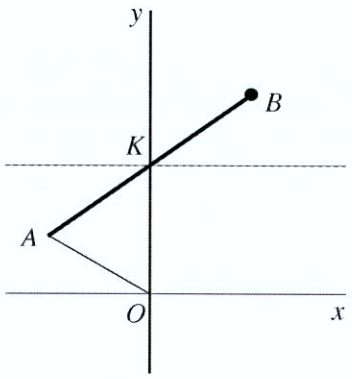
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009
Meccanica Razionale

Nome:.................................

N. matr.:................................ Ancona, 9 settembre 2009

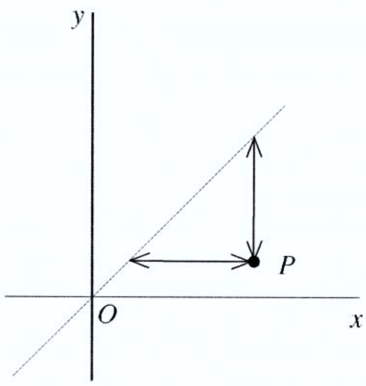
1. (9 punti) Nel piano verticale $O(x, y)$ si consideri un'asta AB di massa M e lunghezza $2L$, il cui punto medio K è vincolato a scorrere senza attrito sull'asse y; sull'estremo A agisce una molla di costante elastica $k > 0$ che collega A con l'origine O e sull'estremo B è saldato un punto materiale di massa m.



Determinare le configurazioni di equilibrio utilizzando il criterio di Dirichlet.

2. (9 punti) Per il sistema dell'esercizio precedente, calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio incondizionatamente stabile.

3. (7 punti) Un punto materiale P di massa m si muove sul piano orizzontale $O(x, y)$. Due molle di costante elastica $k > 0$ collegano il punto P con la bisettrice del I e II quadrante secondo direzioni parallele agli assi coordinati (vedi figura).



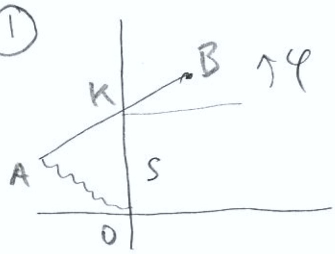
Studiare il moto del punto P utilizzando a piacere le equazioni di Newton o quelle di Lagrange.

4. (7 punti)

   (i) Enunciare e dimistrare il primo ed il secondo teorema di König;

   (ii) Scrivere l'energia cinetica di un'asta AB di massa m e lunghezza l che ruota nello spazio con l'estremo A fisso nell'origine del sistema di riferimento, utilizzando
   (a) l'espressione per un corpo rigido con un punto fisso e
   (b) il teorema di König
   verificando l'uguaglianza delle due espressioni.

(1)



$$V = Mgs + mg(s + L\sin\varphi) + \frac{1}{2}k\left[L^2 + s^2 - 2Ls\sin\varphi\right]$$

$$V_s = (M+m)g + ks - kL\sin\varphi$$

$$V_\varphi = mgL\cos\varphi - kLs\cos\varphi = (mg - ks)L\cos\varphi$$

$$V_{ss} = k \qquad V_{s\varphi} = -kL\cos\varphi \qquad V_{\varphi\varphi} = L(ks - mg)\sin\varphi$$

(a) $\cos\varphi = 0 \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \qquad ks = \pm kL - (M+m)g$

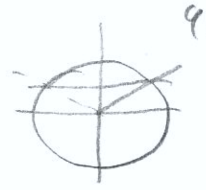
$$T_1 = \left(\frac{\pi}{2}, kL - (M+m)g\right) \qquad T_2 = \left(-\frac{\pi}{2}, -kL - (M+m)g\right)$$

$$T_1 \to V_{s\varphi} = 0 \qquad V_{\varphi\varphi} = L\left[kL - (M+2m)g\right]$$

$$T_2 \to V_{s\varphi} = 0 \qquad V_{\varphi\varphi} = L\{mg + kL + (M+m)g\} = L\left[kL + (M+2m)g\right] > 0$$

(b) $ks = mg \qquad (M+m)g + mg - kL\sin\varphi = 0$

$\sin\varphi = \dfrac{(M+2m)g}{kL}$ deve essere $\dfrac{(M+2m)g}{kL} > 0$



$$T_3 = \left(\varphi_0, \frac{mg}{k}\right) \qquad T_4 = \left(\pi - \varphi_0, \frac{mg}{k}\right) \qquad V_{\varphi\varphi} = 0 \ !!$$

(2) Oscillazioni attorno a T_2

$$v_K^2 = \dot{s}^2 \qquad B - O = L(\hat{i}\cos\varphi + \hat{j}\sin\varphi) + s\hat{j}$$

$$T = \frac{1}{2}Mv_K^2 + \frac{1}{2}I(K)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 \qquad \underline{v}_B = -L\hat{i}\dot{\varphi}\sin\varphi + (L\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{s})\hat{j}$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}(2L)^2M\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left\{L^2\dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 + 2L\dot{s}\dot{\varphi}\cos\varphi\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(M+m)\dot{s}^2 + \left(\frac{1}{3}M + m\right)L^2\dot{\varphi}^2 + mL\dot{s}\dot{\varphi}\cos\varphi\right\}$$

$$T(T_2) = \begin{pmatrix} M+m & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}M+m \end{pmatrix} \qquad V(T_2) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & L[kL + (M+2m)g] \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k - \omega^2(M+m) & \\ & L[--] - \omega^2\left[\frac{M}{3} + m\right] \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{L[kL + (M+2m)g]}{\frac{M}{3} + m}}$$

(3) $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ $\qquad V = \frac{1}{2} k (x-y)^2 \cdot 2 = k(x-y)^2$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2k(x-y) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2k(x-y)$$

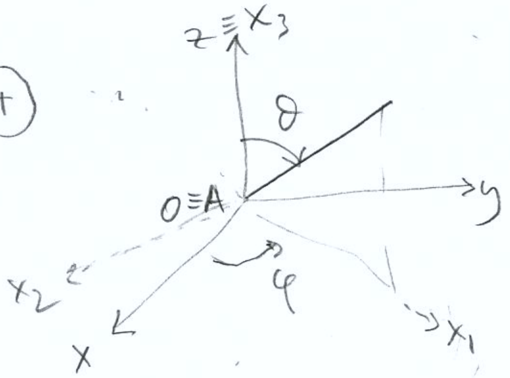
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2k(x-y) \\ m\ddot{y} = 2k(x-y) \end{cases} \qquad \begin{cases} m\frac{d^2}{dt^2}(x+y) = 0 \\ m\frac{d^2}{dt^2}(x-y) + 4k(x-y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = x+y \\ \eta = x-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} = 0 \\ m\ddot{\eta} + 4k\eta = 0 \end{cases}$$

$\xi = vt + \xi_0$

$\eta = A\cos\omega t + B \sin \omega t \qquad \omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$

(4)



(a) $T = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{\underline{I}}(A) \cdot \underline{\omega}$

(x_1, x_2, x_3) assieme solidale con

$\hat{i}_3 = \hat{k}$ $\qquad I_{11} = \frac{1}{3} m\ell^2 \cos^2\vartheta$

$\hat{i}_1 = \hat{i}\cos\varphi + \hat{j}\,\mathrm{sen}\,\varphi$ $\qquad I_{22} = \frac{1}{3} m\ell^2$

$\hat{i}_2 = \hat{i}\,\mathrm{sen}\,\varphi - \hat{j}\cos\varphi$ $\qquad I_{33} = \frac{1}{3} m\ell^2 \sin^2\vartheta$

$\underline{\omega} = \hat{i}_2 \dot{\vartheta} + \hat{i}_3 \dot{\varphi}$

$I_{13} = -\frac{1}{3} m\ell^2 \cos\vartheta \sin\vartheta \qquad I_{23} = I_{12} = 0$

$$T = \frac{1}{2}(0, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) \left(\underline{\underline{I}} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(0, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) \begin{pmatrix} I_{12}\dot{\vartheta} + I_{13}\dot{\varphi} \\ I_{22}\dot{\vartheta} + I_{23}\dot{\varphi} \\ I_{32}\dot{\vartheta} + I_{33}\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[(I_{22}\dot{\vartheta} + \cancel{I_{23}\dot{\varphi}})\dot{\vartheta} + (\cancel{I_{32}\dot{\vartheta}} + I_{33}\dot{\varphi})\dot{\varphi} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m\ell^2\right)(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta)$$

(b) $P_0 - O = \frac{\ell}{2}\left[(\hat{i}\cos\varphi + \hat{j}\,\mathrm{sen}\,\varphi)\sin\vartheta + \hat{k}\cos\vartheta \right]$

$$\underline{v}_0 = \frac{\ell}{2}\left[\dot{\varphi}(-\hat{i}\,\mathrm{sen}\,\varphi + \hat{j}\cos\varphi)\sin\vartheta + \dot{\vartheta}(\hat{i}\cos\varphi + \hat{j}\,\mathrm{sen}\,\varphi)\cos\vartheta - \hat{k}\dot{\vartheta}\sin\vartheta \right]$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \frac{\ell^2}{2}\left[\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2 \sin^2\vartheta \right] = \frac{1}{4} m\ell^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta)$$

$I_{22}(P_0) = \frac{1}{12} m\ell^2 \qquad I_{33}(P_0) = \frac{1}{3} m\ell^2 \sin^2\vartheta - m\frac{\ell^2}{4}\sin^2\vartheta = \frac{1}{12} m\ell^2 \sin^2\vartheta$

etc.