Corsi di Laurea del Vecchio Ordinamento
Anno Accademico 2006/2007
Meccanica Razionale

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 20 aprile 2007

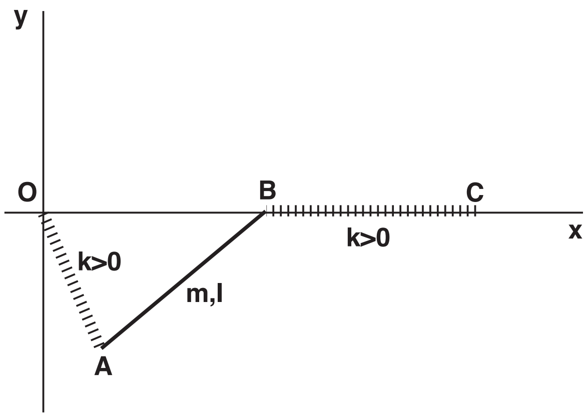
Un'asta materiale pesante AB di massa m e lunghezza l si muove nel piano verticale $O(x, y)$. L'estremo B scorre senza attrito sull'asse x, mentre l'asta ruota liberamente attorno a B. Oltre alla forza peso, sull'asta agiscono due molle, di ugual costante elastica $k > 0$, che collegano gli estremi A e B dell'asta rispettivamente con l'origine O e con il punto $C(2l, 0)$.

(i) Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane;

(ii) scrivere l'energia cinetica;

(iii) scrivere l'energia potenziale;

(iv) scrivere le equazioni di Lagrange.



Soluzione.
Il sistema ha due gradi di libertà; si scelgano come coordinate lagrangiane l'ascissa del punto B, s, e l'angolo $\varphi = \widehat{ABO}$.
Centro di massa dell'asta:

$$\begin{aligned}
P_0 - O &= (P_0 - B) + (B - O) \\
&= -\frac{l}{2}(\hat{\mathbf{i}}\,\cos\varphi + \hat{\mathbf{j}}\,\sin\varphi) + s\,\hat{\mathbf{i}} \\
\dot{P}_0 &= \frac{l}{2}(\hat{\mathbf{i}}\,\sin\varphi - \hat{\mathbf{j}}\,\cos\varphi)\,\dot{\varphi} + \dot{s}\,\hat{\mathbf{i}} \\
\dot{P}_0^2 &= \frac{l^2}{4}\,\dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 + l\,\dot{s}\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi
\end{aligned}$$

Energia cinetica:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\,m\,\dot{P}_0^2 + \frac{1}{2}\,I_0\,\dot{\varphi}^2 \\
&= \frac{1}{2}\,m\,\left[\frac{l^2}{4}\,\dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 + l\,\dot{s}\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi\right] + \frac{1}{2}\,\left(\frac{1}{12}\,m\,l^2\right)\,\dot{\varphi}^2 \\
&= \frac{1}{2}\,m\,\left[\frac{1}{3}\,l^2\,\dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 + l\,\dot{s}\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi\right]
\end{aligned}$$

Energia potenziale:

$$\begin{aligned}
V &= m\,g\,y_0 + \frac{1}{2}\,k\,\left(\overline{OA}^2 + \overline{BC}^2\right) \\
&= -m\,g\,\frac{l}{2}\,\sin\varphi + \frac{1}{2}\,k\,\left[\left(s^2 + l^2 - 2\,s\,l\,\cos\varphi\right) + (2l - s)^2\right] \\
&= -m\,g\,\frac{l}{2}\,\sin\varphi + k\,\left[s^2 - l\,s\,(2 + \cos\varphi)\right]
\end{aligned}$$

Lagrangiana:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= T - V \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} &= m\,\left(\dot{s} + \frac{l}{2}\,\dot{\varphi}\sin\varphi\right) \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} &= -2\,k\,s + k\,l\,(2 + \cos\varphi) \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} &= \frac{1}{3}\,m\,l^2\,\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\,m\,l\,\dot{s}\,\sin\varphi \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= \frac{1}{2}\,m\,l\,(\dot{s}\,\dot{\varphi} + g)\,\cos\varphi - k\,l\,s\,\sin\varphi
\end{aligned}$$

Equazioni di Lagrange:

$$m\,\left[\ddot{s} + \frac{l}{2}\,(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}\cos\varphi)\right] + 2\,k\,s - k\,l\,(2 + \cos\varphi) = 0$$

$$\frac{1}{3}\,m\,l^2\,\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\,m\,l\,(\ddot{s}\,\sin\varphi + \dot{s}\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi) - \frac{1}{2}\,m\,l\,(\dot{s}\,\dot{\varphi} + g)\,\cos\varphi + k\,l\,s\,\sin\varphi = 0$$