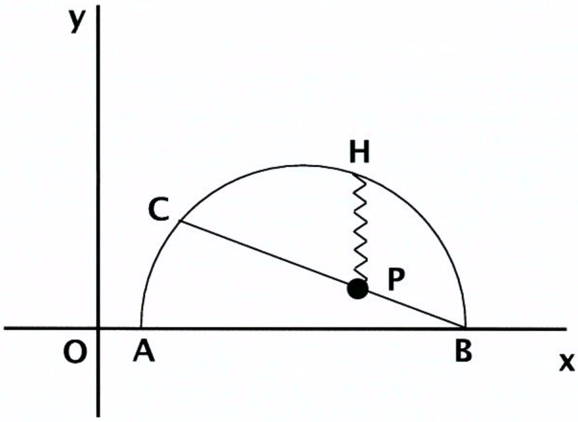
# Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione
## Anno Accademico 2009/2010
## Meccanica Razionale

Nome ..................................................

N. Matricola ..................................................  Ancona, 17 giugno 2010

1. (9 punti) Un sistema piano, che si muove nel piano verticale $O(x, y)$ è costituito da un semicerchio omogeneo pesante $AB$ di massa $M$ e raggio $R$, il cui diametro $AB$ scorre senza attrito su una guida orizzontale, coincidente con l'asse $Ox$. Un punto materiale pesante $P$ di massa $m$ è libero di scorrere lungo la scanalatura $BC$ mostrata in figura. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto $P$ con il punto $H$, proiezione ortogonale di $P$ sul bordo. Scrivere le equazioni del moto utilizzando le equazioni di Lagrange.




2. (7 punti) Dimostrare che un asse che una retta perpendicolare ad un piano di simmetria materiale è asse principale d'inerzia.

---

③ $\underline{F} = -\frac{1}{x^2}\hat{\imath} - \frac{1}{y^2}\hat{\jmath} + \hat{k}$   $D = \mathbb{R} \setminus \{\text{asse } z\}$

non è semplicemente connesso

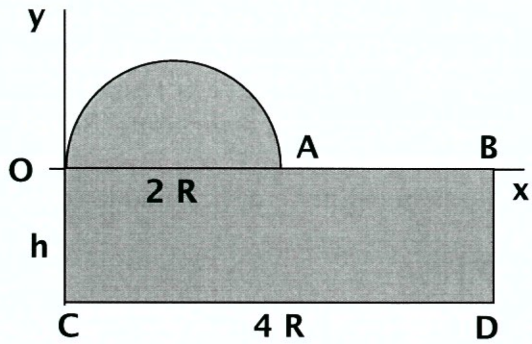
$\underline{\nabla} \times \underline{F} = \underline{0}$   $\gamma = \begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \sin\vartheta \\ z = 0 \end{cases}$   $\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \oint \underline{F} \cdot \underline{\gamma}' \, d\vartheta =$

$= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta} - \frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} \right\} d\vartheta = 0$   conservativo !

3. (9 punti) Studiare la conservatività del campo di forze

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -\frac{1}{x^2}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{y^2}\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

4. (7 punti) Calcolare la matrice d'inerzia di una lamina piana omogenea di massa $m$ ottenuta dall'unione di un semicerchio di diametro $OA = 2R$ con un rettangolo $OBCD$ di lati $OB = 4\,R$ e $OC = h$, rispetto al sistema solidale $O(x,y,z)$ mostrato in figura. Determinare infine le direzioni principali d'inerzia.




---

(4) Masse :

$$\begin{cases} m_S + m_R = m \\ m_S = \dfrac{A_R}{A_S} m_R \end{cases} \qquad m_R\left\{1 + \frac{A_R}{A_S}\right\} = m$$

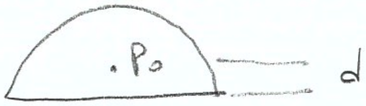
$$m_R = \frac{A_S}{A_S + A_R}\, m = \frac{\pi R^2/2}{\pi R^2/2 + 4Rh}$$

$$m_S = \frac{4Rh}{\pi R^2/2 + 4Rh}\, m$$

Semicerchio : $I_{11} = \frac{1}{4} m_S R^2$

$$I_{22} = \frac{1}{4} m_S R^2 + m_S R^2 = \frac{5}{4} m_S R^2 \qquad I_{33} = \frac{3}{2} m_S R^2$$

$$I_{12} = -m_S R d$$



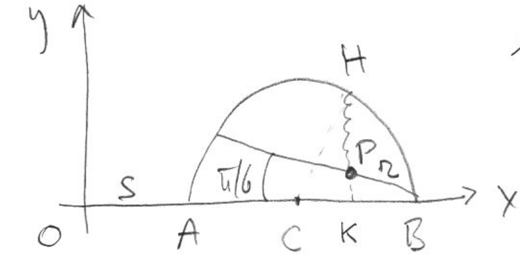

Rettangolo : $I_{11} = \sigma \int_0^{4R} dx \int_{-h}^{0} dy\, y^2 = 4R\sigma \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} m_R h^2 \qquad I_{33} = I_{11} + I_{22}$

$$I_{22} = \sigma \int_0^{4R} dx \int_{-h}^{0} dy\, x^2 = \sigma h \frac{64R^3}{3} = \frac{16}{3} m_R R^2$$

$$I_{12} = -\sigma \int_0^{4R} dx \int_{-h}^{0} dy\, xy = -\sigma \frac{\overset{4}{\cancel{16}} R^2}{\cancel{2}} \cdot \left(-\frac{h^2}{\cancel{2}}\right) = -m_R R h$$

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}_S + \underline{\underline{I}}_R$$

(1)




$l = 2$ $\qquad q_1 = s = x_A$

$q_2 = r = |P - B|$

$$P - O = P - B + B - O = r\left(-\hat{\imath}\frac{\sqrt{3}}{2} + \hat{\jmath}\frac{1}{2}\right) + (s + 2R)\hat{\imath}$$

$$\dot{P} = \dot{r}\left(\frac{\hat{\jmath} - \hat{\imath}\sqrt{3}}{2}\right) + \dot{s}\hat{\imath}$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m\left\{\left(\dot{s} - \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{r}\right)^2 + \frac{\dot{r}^2}{4}\right\} = \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m\left\{\dot{s}^2 + \dot{r}^2 - \dot{r}\dot{s}\sqrt{3}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(M+m)\dot{s}^2 + m\dot{r}^2 - m\dot{r}\dot{s}\sqrt{3}\right\}$$

Punto H: $\overline{PH} = \overline{HK} - \overline{PK} = \sqrt{R^2 - \left(R - r\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{r}{2} =$

$$= \sqrt{Rr\sqrt{3} - \frac{3}{4}r^2} - \frac{r}{2}$$

$$V = mg\frac{r}{2} + \frac{1}{2}k\left\{Rr\sqrt{3} - \frac{3}{4}r^2 + \frac{r^2}{4} - r\sqrt{Rr\sqrt{3} - \frac{3}{4}r^2}\right\} =$$

$$= mg\frac{r}{2} + \frac{1}{2}k\left\{Rr\sqrt{3} - \frac{1}{2}r^2 - r\sqrt{Rr\sqrt{3} - \frac{3}{4}r^2}\right\}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = (M+m)\dot{s} - \frac{1}{2}m\dot{r}\sqrt{3} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} - \frac{1}{2}m\dot{s}\sqrt{3} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = -\frac{mg}{2} - \frac{1}{2}k\left\{R\sqrt{3} - r - \sqrt{Rr\sqrt{3} - \frac{3}{4}r^2} - r\frac{R\sqrt{3} - \frac{3}{2}r}{\sqrt{\phantom{xxxx}}}\right\}$$

etc.