Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009
Meccanica Razionale

Nome:................................

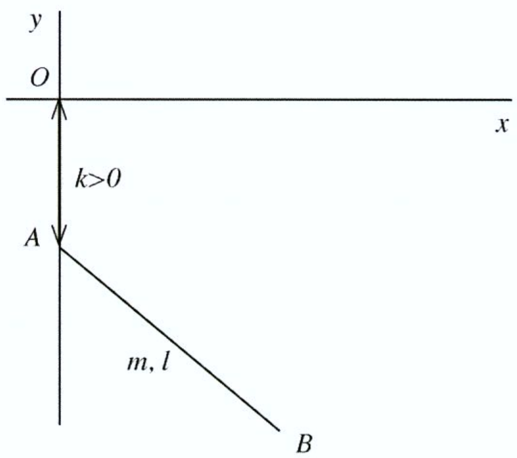
N. matr.:................................ Ancona, 25 giugno 2009

1. (10 punti) Ricavare le equazioni di Lagrange per un sistema olonomo ad l gradi di libertà, sul quale agiscono sia forze conservative che forze non conservative.

   Nella derivazione, lo studente può usare senza dimostrazione le relazioni

$$\frac{\partial P}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_k}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_k}$$

   Nel piano verticale $O(x, y)$ si consideri quindi un'asta AB di massa m e lunghezza l, il cui estremo A è vincolato a scorrere senza attrito sull'asse y; sull'estremo A agisce una molla di costante elastica $k > 0$ che collega A con l'origine O ed una forza viscosa di viscosità costante λ.



   (i) Determinare il numero dei gradi di libertà del sistema e scegliere opportune coordinate lagrangiane;

   (ii) determinare tutte le forze che agiscono sull'asta, comprese le reazioni vincolari;

   (iii) scrivere le equazioni del moto utilizzando le equazioni di Lagrange.

2. *(i)* (3 punti) Fornire una definizione di configurazione di equilibrio per un sistema olonomo ad un grado di libertà, usando a piacere il linguaggio delle equazioni differenziali o il linguaggio dello spazio delle fasi.

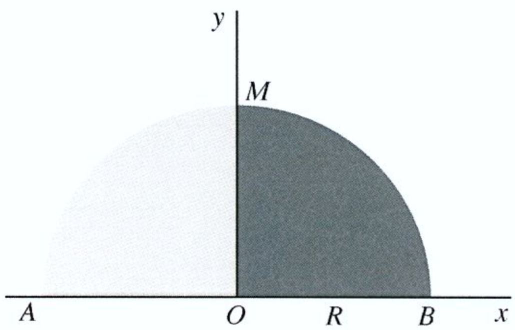
   (ii) (4 punti) Dare la definizione di equilibrio stabile secondo Liapunov; enunciare il criterio di stabilità di Dirichlet e dimostrarlo usando la conservazione dell'energia.

3. *(i)* (5 punti) Enunciare e dimostrare le formule di Poisson per la variazione nel tempo dei versori di un sistema solidale;

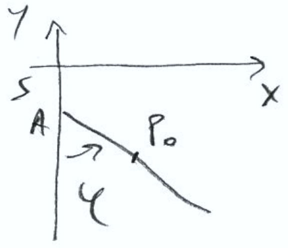
   (ii) (3 punti) formulare la definizione di moto rigido piano specificando correttamente cosa si intende per piano rappresentativo del moto e, utilizzando le formule di Poisson del punto precedente, dimostrare che in un moto rigido piano la velocità angolare ω è perpendicolare al piano rappresentativo del moto.

4. *(i)* (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Huygens nella sua formulazione generale.

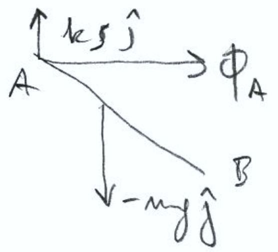
   (ii) (4 punti) Si consideri quindi il semicerchio non omogeneo di raggio R, massa m, diametro AB e centro l'origine (vedi figura), con il quarto di cerchio BMO avente densità doppia rispetto al quarto AMO. Calcolarne la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$, con l'asse z perpendicolare al piano della figura. Determinare, infine, le direzioni principali d'inerzia con origine nel punto O sulla base delle simmetrie materiali.



1)



$l = 2 \;,\; (s, \varphi)$



$\uparrow -\lambda \underline{v}_A$

$A - O = -s\hat{j} \qquad \underline{v}_A = -\dot{s}\hat{j}$

$\underline{F}_\lambda = \lambda \dot{s} \hat{j}$

$P_0 - O = P_0 - A + A - O =$

$= \frac{l}{2}(\hat{\imath} \operatorname{sen}\varphi - \hat{j}\cos\varphi) - s\hat{j}$

$\underline{v}_0 = \frac{l}{2}\dot{\varphi}(\hat{\imath}\cos\varphi + \hat{j}\operatorname{sen}\varphi) - \dot{s}\hat{j}$

$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I(P_0)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m \left\{ \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \left(\frac{l}{2}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi - \dot{s}\right)^2 \right\} + \frac{1}{24} m l^2 \dot{\varphi}^2 =$

$= \frac{1}{2} m \left(\frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 - l\dot{\varphi}\dot{s}\operatorname{sen}\varphi \right) + \frac{1}{24} m l^2 \dot{\varphi}^2 =$

$= \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{3} l^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 - l\dot{\varphi}\dot{s}\operatorname{sen}\varphi \right) \qquad V = -mg\left(s + \frac{l}{2}\cos\varphi\right) + \frac{1}{2} k s^2$

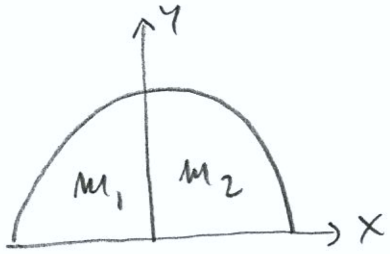
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} - \frac{1}{2} m l \dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = mg - ks$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3} m l^2 \dot{\varphi} - \frac{1}{2} m l \dot{s}\operatorname{sen}\varphi \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2} m l \dot{\varphi}\dot{s}\cos\varphi - mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\varphi$

$Q_s = \underline{F}_\lambda \cdot \frac{\partial A}{\partial s} = \lambda\dot{s}\hat{j}\cdot(-\hat{j}) = -\lambda\dot{s} \qquad Q_\varphi = \underline{F}_\lambda \cdot \frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0$

$$\begin{cases} m\ddot{s} - \frac{1}{2} m l (\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) + ks - mg + \lambda\dot{s} = 0 \\ \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} m l (\ddot{s}\sin\varphi + \cancel{\dot{s}\dot{\varphi}\cos\varphi}) + \cancel{\frac{1}{2} m l \dot{s}\dot{\varphi}\cos\varphi} + mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\varphi = 0 \end{cases}$$

4)



$m_1 = \frac{m}{3} \qquad m_2 = \frac{2}{3} m$

$$I_{11} = \sigma_2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr\, r\, r^2 \sin^2\varphi + \sigma_1 \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^R dr\, r\, r^2 \sin^2\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} m R^2 = I_{22} \qquad I_{33} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I_{12} = -\sigma_2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr\, r\, r^2 \sin\varphi \cos\varphi - \sigma_1 \int_{\pi/2}^{\pi} \cdots = -\frac{m R^2}{6\pi}$$

Direzioni principali d'inerzia