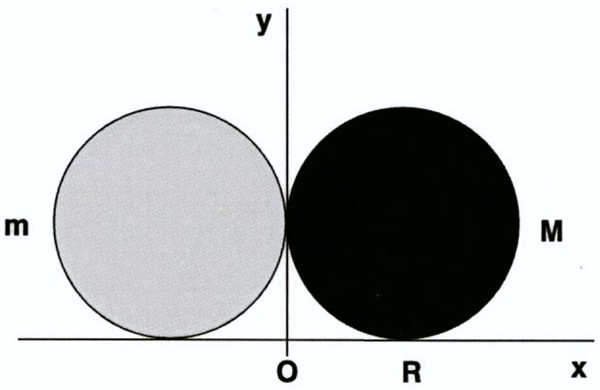
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009
Meccanica Razionale

Nome:...............................

N. matr.:............................... Ancona, 24 gennaio 2009

1. *(i)* (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Huygens per la matrice d'inerzia di un sistema rigido;

   (ii) (4 punti) un corpo rigido è formato da due cerchi di raggio R e centri rispettivamente i punti $(1, 1)$ e $(-1, 1)$; il cerchio a sinistra dell'asse y ha massa m ed il cerchio a destra ha massa M.

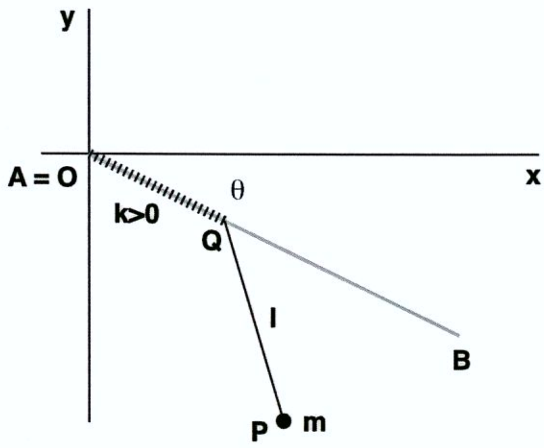


   – Calcolare la matrice d'inerzia di un cerchio omogeneo di centro l'origine, raggio R e massa M;
   – utilizzando soltanto il risultato precedente, le simmetrie materiali ed il teorema di Huygens, calcolare la matrice d'inerzia del corpo rigido in figura nel sistema di riferimento solidale $O(x, y, z)$ mostrato (con l'asse z ortogonale al piano della figura);
   – individuare le direzioni principali d'inerzia con origine nel punto O sulla base delle simmetrie materiali e calcolare tutti gli elementi della matrice d'inerzia in tale sistema di riferimento.

2. *(i)* (3 punti) Fornire la definizione di configurazione di equilibrio per un sistema olonomo utilizzando il linguaggio dello spazio delle fasi e la definizione di equilibrio stabile secondo Lyapunov;

   (ii) (4 punti) un punto materiale P di massa m scorre senza attrito su una guida verticale; oltre alla forza di gravità, sul punto agisce una molla di costante elastica $k > 0$ e centro il punto O sulla guida; determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità mediante il primo criterio di Lyapunov; risolvere quindi le equazioni del moto e rappresentarlo sul piano delle fasi disegnando le orbite di fase.

3. Un pendolo matematico è costituito da un punto P di massa m, appeso mediante una sbarretta priva di massa QP ad una guida rettilinea che forma un angolo Θ con l'orizzontale. Sul punto di sospensione Q agisce una molla di costante elastica $k > 0$ (vedi figura).



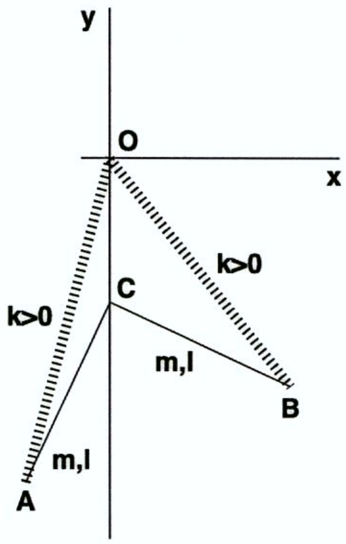
(i) (1 punto) Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane;

(ii) (2 punti) scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale;

(iii) (2 punti) determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità;

(iv) (3 punti) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

4. Un sistema rigido è costituito da due aste AC e BC, di massa m e lunghezza l, saldate ad angolo retto in C e libere di muoversi nel piano verticale $O(x, y)$. L'estremo C scorre senza attrito sull'asse y e le due aste sono libere di ruotare attorno a C.



(i) (1 punto) Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane;

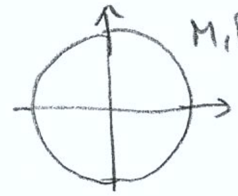
(ii) (4 punti) scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale;

(iii) (3 punti) scrivere le equazioni di Lagrange.

(iv) (3 punti) verificare se sono possibili moti in cui l'inclinazione delle aste rispetto agli assi rimane costante.

(1) (i) VEDI TESTI

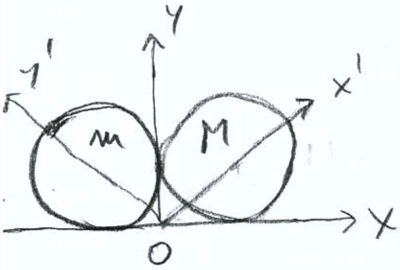
(ii)



$$I_{11} = \sigma \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, r^3 \sin^2\varphi = \frac{1}{4} MR^2$$

$$I_{22} = \sigma \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, r^3 \cos^2\varphi = \frac{1}{4} MR^2$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{1}{2} MR^2 \qquad I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$$



$$I_{11} = I_{11}^m + I_{11}^M = \frac{1}{4} mR^2 + mR^2 + \frac{1}{4} MR^2 + MR^2 =$$

$$= \frac{5}{4}(m+M)R^2 = I_{22} \; ; \quad I_{33} = \frac{5}{2}(m+M)R^2$$

$$I_{12} = I_{12}^m + I_{12}^M = 0 + mR^2 + 0 - MR^2 = (m-M)R^2$$

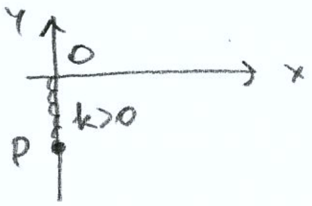
$O(x', y')$ è principale d'inerzia $\quad I'_{11} = I'^{M}_{11} + I'^{m}_{11} = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{4} mR^2 + m(R\sqrt{2}$

$$= \frac{1}{4} MR^2 + \frac{9}{4} mR^2$$

$$I'_{22} = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{9}{4} MR^2$$

$$I'_{33} = \frac{5}{2}(m+M)R^2$$

(2)



Newton: $m\ddot{y} = -mg - ky \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\begin{cases} \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_y = -\omega^2 y - g = -\omega^2\left(y + \frac{g}{\omega^2}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = y + \frac{g}{\omega^2} \\ y_2 = v_y \end{cases}$$

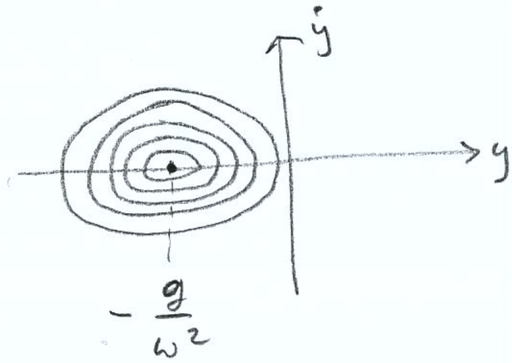
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\omega^2 y_1 \end{cases}$$

Punto critico $y_1 = y_2 = 0$ cioè $y = -\frac{g}{\omega^2}$, $v_y = 0$

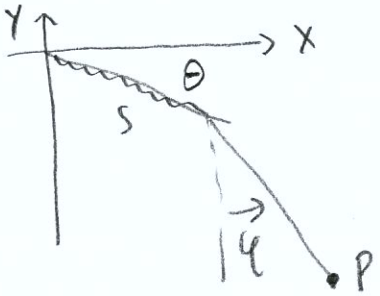
Stabilità $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = \pm i\omega \qquad$ stabile

Eq. del moto $\ddot{y} + \omega^2 y = -g$

Soluzione $y(t) = -\frac{g}{\omega^2} + A\cos\omega t + B\sin\omega t$



③



$l = 2 \qquad q_1 = s, \ q_2 = \varphi$

$P - O = (s\cos\theta + l\sin\varphi)\hat{\imath} - (s\sin\theta + l\cos\varphi)\hat{\jmath}$

$\dot{P} = (\dot{s}\cos\theta + l\dot{\varphi}\cos\varphi)\hat{\imath} - (\dot{s}\sin\theta - l\dot{\varphi}\sin\varphi)\hat{\jmath}$

$T = \frac{1}{2} m \dot{P}^2 = \frac{1}{2} m \left[\dot{s}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{s}\dot{\varphi}\cos(\theta+\varphi) \right]$

$V = -mg(s\sin\theta + l\cos\varphi) + \frac{1}{2} k s^2 \qquad \frac{\partial V}{\partial s} = -mg\sin\theta + ks$

$V_{ss} = k \quad V_{s\varphi} = 0 \quad V_{\varphi\varphi} = mgl\cos\varphi \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgl\sin\varphi$

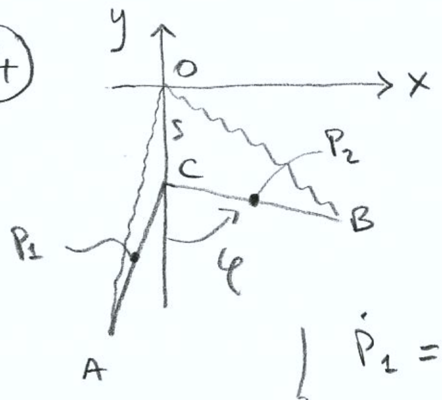
$\begin{cases} ks - mg\sin\theta = 0 \\ mgl\sin\varphi = 0 \end{cases}$ equilibrio $\Gamma_1 \equiv \left(\frac{mg}{k}\sin\theta, 0\right) \quad \Gamma_2 \equiv \left(\frac{mg}{k}\sin\theta, \pi\right)$

$H_1 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}$ STABILE $\qquad H_2 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -mgl \end{pmatrix}$ INSTABILE

$T = \begin{pmatrix} m & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & ml^2 \end{pmatrix} \qquad |V - \omega^2 T| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} k-\omega^2 m & -\omega^2 ml\cos\theta \\ -\omega^2 ml\cos\theta & mgl - ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$

Equazione per ω (semplificando) : $ml\omega^4\sin^2\theta - (mg + kl)\omega^2 + kg = 0$

④



$l = 2 \qquad q_1 = s, \ q_2 = \varphi$

$\begin{cases} P_1 - O = -\frac{l}{2}\hat{\imath}\cos\varphi - \left(s + \frac{l}{2}\sin\varphi\right)\hat{\jmath} \\ P_2 - O = \frac{l}{2}\hat{\imath}\sin\varphi - \left(s + \frac{l}{2}\cos\varphi\right)\hat{\jmath} \end{cases}$

$\begin{cases} \dot{P}_1 = \frac{l}{2}\hat{\imath}\dot{\varphi}\sin\varphi - \left(\dot{s} + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\hat{\jmath} \\ \dot{P}_2 = \frac{l}{2}\hat{\imath}\dot{\varphi}\cos\varphi - \left(\dot{s} - \frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\hat{\jmath} \end{cases}$

$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m \dot{P}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{P}_2^2 + 2\left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m l^2\right)\dot{\varphi}^2 \right\} =$

$= \frac{1}{2} m \left\{ \frac{2}{3} l^2 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{s}^2 + l\dot{s}\dot{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) \right\}$

$V = -mg\left[2s + \frac{l}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi)\right] + \frac{1}{2} k \left\{ 2(s^2 + l^2) - 2sl(\cos\varphi + \sin\varphi) \right\}$

$\mathcal{L} = T - V$

Equazioni di Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = 2m\dot{s} + \frac{ml}{2}\dot{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 2mg - 2ks + kl(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi} + \frac{ml}{2}\dot{s}(\cos\varphi - \sin\varphi)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{ml}{2}\dot{s}\dot{\varphi}(-\sin\varphi - \cos\varphi) + \frac{mgl}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi) - ksl(\cos\varphi - \sin\varphi)$$

$$\begin{cases} 2m\ddot{s} + \frac{ml}{2}\left[\ddot{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) - \dot{\varphi}^2(\sin\varphi + \cos\varphi)\right] = 2mg - 2ks - kl(\cos\varphi + \sin\varphi) \\ \frac{2}{3}ml^2\ddot{\varphi} + \frac{ml}{2}\left[\ddot{s}(\cos\varphi - \sin\varphi) - \cancel{\dot{s}\dot{\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi)}\right] = \cancel{\frac{ml}{2}\dot{s}\dot{\varphi}(-\sin\varphi - \cos\varphi)} + \\ \qquad + \frac{mgl}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi) - ksl(\cos\varphi - \sin\varphi) \end{cases}$$

Con $\varphi =$ costante, $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$ le equazioni diventano

$$\begin{cases} 2m\ddot{s} = 2mg - 2ks - kl(\cos\varphi + \sin\varphi) \\ \frac{ml}{2}\ddot{s}(\cos\varphi - \sin\varphi) = \left(\frac{mgl}{2} - ksl\right)(\cos\varphi - \sin\varphi) \end{cases}$$

① $\cos\varphi - \sin\varphi = 0 \implies \varphi = \frac{\pi}{4}$ o $\frac{5}{4}\pi$

$m\ddot{s} + ks = mg + 2kl\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ MOTO ARMONICO ATTORNO AL PUNTO

$mg \pm kl\sqrt{2}$

② $\cos\varphi - \sin\varphi \neq 0$

$$\begin{cases} \ddot{s} = g - \frac{k}{m}s + \frac{kl}{2m}(\cos\varphi + \sin\varphi) \\ \ddot{s} = g - \frac{2ks}{m} \end{cases}$$ IMPOSSIBILE