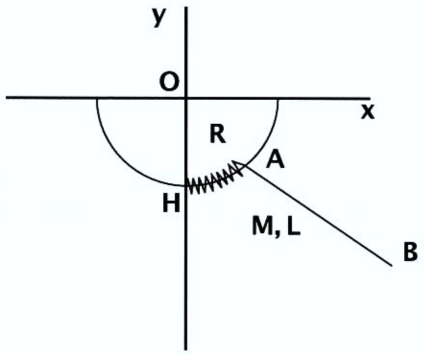
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2009/2010
Meccanica Razionale

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 22 gennaio 2010

1. (9 punti) Un'asta AB di massa M e lunghezza L si muove nel piano verticale $O(x, y)$, con l'estremo A vincolato a scorrere sulla semicirconferenza di centro l'origine e raggio R situata nel semipiano inferiore. L'estremo A è inoltre collegato da una molla rotazionale di costante $k > 0$ al punto H, intersezione della semicirconferenza con l'asse y. Scrivere le equazioni del moto del sistema utilizzando le equazioni di Lagrange.



2. (7 punti) Caratterizzare le configurazioni di un corpo rigido libero mediante il sistema di riferimento solidale e determinare così il numero di gradi di libertà.

---

2 Sistema fisso $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$

Sistema solidale $(\hat{\imath}_1, \hat{\imath}_2, \hat{\imath}_3)$

$\hat{\imath}_1 = \alpha_1 \hat{\imath} + \beta_1 \hat{\jmath} + \gamma_1 \hat{k}$

$\hat{\imath}_2 = \; - - -$

$\hat{\imath}_3 = \; - - -$

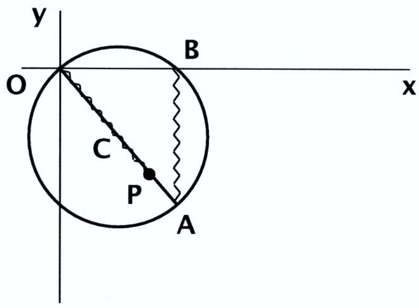
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$ è una matrice ortogonale perché

$\hat{\imath}_1 \cdot \hat{\imath}_1 = \hat{\imath}_2 \cdot \hat{\imath}_2 = \hat{\imath}_3 \cdot \hat{\imath}_3 = 1$

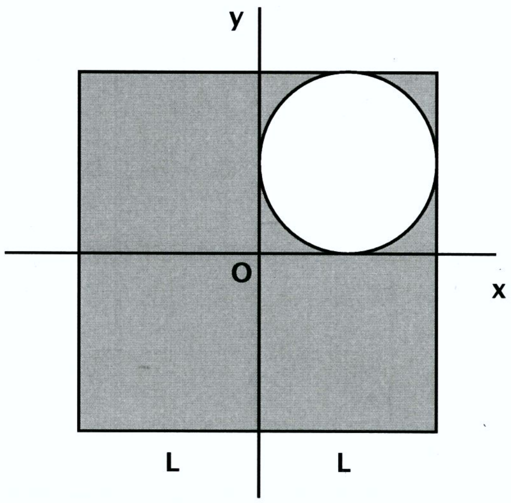
$\hat{\imath}_1 \cdot \hat{\imath}_2 = \hat{\imath}_1 \cdot \hat{\imath}_3 = \hat{\imath}_2 \cdot \hat{\imath}_3 = 0$

etc.

3. (9 punti) Un sistema piano è costituito da un disco omogeneo pesante di massa M e raggio R, appeso per un punto del bordo all'origine O di un piano cartesiano verticale $O(x,y)$. Un punto materiale pesante P di massa m è libero di scorrere lungo una scanalatura diametrale. Due molle di ugual costante elastica $k > 0$ collegano, rispettivamente, il punto P con O ed il punto A del bordo, diametralmente opposto ad O, con la sua proiezione verticale sull'asse x, B. Determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

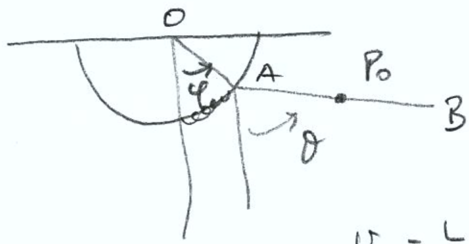


4. (7 punti) Calcolare, nel sistema di riferimento solidale $O(x,y,z)$ mostrato in figura, la matrice d'inerzia della lamina piana di massa M mostrata in figura e costituita da un quadrato di lato $2L$ privato del cerchio inscritto nel quadrante destro superiore. L'asse z è perpendicolare al piano della lamina. Dire, sulla base delle simmetrie materiali, se la terna è principale d'inerzia e, in caso negativo, indicarne una con origine in O.



① $l=2$

(φ,ϑ)



$P_0 - O = P_0 - A + A - O =$

$= \frac{L}{2}(\hat\imath\,\mathrm{sen}\,\vartheta - \hat\jmath\cos\vartheta) + R(\hat\imath\,\mathrm{sen}\,\varphi - \hat\jmath\cos\varphi)$

$\underline{v}_0 = \frac{L}{2}\dot\vartheta(\hat\imath\cos\vartheta + \hat\jmath\,\mathrm{sen}\,\vartheta) + R\dot\varphi(\hat\imath\cos\varphi + \hat\jmath\,\mathrm{sen}\,\varphi)$

$$T = \frac{1}{2}M v_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ML^2\right)\dot\vartheta^2 = \frac{1}{2}M\left\{\frac{L^2}{4}\dot\vartheta^2 + R^2\dot\varphi^2 + LR\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi)\right\}$$

$$V = -Mg\left(\frac{L}{2}\cos\vartheta + R\cos\varphi\right) + \frac{1}{2}k\varphi^2 \qquad \mathcal{L} = T - V$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = MR^2\dot\varphi + \frac{1}{2}MLR\dot\vartheta\cos(\vartheta-\varphi) \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{1}{2}MLR\dot\vartheta\dot\varphi\sin(\vartheta-\varphi) - MgR\,\mathrm{sen}\,\varphi - k\varphi$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\vartheta} = M\frac{L^2}{4}\dot\vartheta + \frac{1}{2}MLR\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi) \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta} = -\frac{1}{2}MRL\dot\vartheta\dot\varphi\sin(\vartheta-\varphi) - Mg\frac{L}{2}\sin\vartheta$$

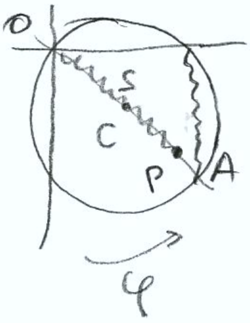
$$\begin{cases} MR^2\ddot\varphi + \frac{1}{2}MLR\left[\ddot\vartheta\cos(\vartheta-\varphi) - \dot\vartheta(\dot\vartheta - \cancel{\dot\varphi})\sin(\vartheta-\varphi)\right] = \cancel{\frac{1}{2}MLR\dot\vartheta\dot\varphi\sin(\vartheta-\varphi)} - MgR\,\mathrm{sen}\,\varphi - k\varphi \\ \frac{ML^2}{4}\ddot\vartheta + \frac{1}{2}MLR\left[\ddot\varphi\cos(\vartheta-\varphi) - \dot\varphi(\cancel{\dot\vartheta} - \dot\varphi)\sin(\vartheta-\varphi)\right] = \cancel{-\frac{1}{2}MRL\dot\vartheta\dot\varphi\sin(\vartheta-\varphi)} - Mg\frac{L}{2}\sin\vartheta \end{cases}$$

etc.

---

③ $l=2$

(φ, s)



$T = \frac{1}{2}I(O)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m\dot P^2$ (non richiesto)

$I(O) = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$

$P - O = s(\hat\imath\,\mathrm{sen}\,\varphi - \hat\jmath\cos\varphi)$

$\dot P = \dot s(\hat\imath\,\mathrm{sen}\,\varphi - \hat\jmath\cos\varphi) + s\dot\varphi(\hat\imath\cos\varphi + \hat\jmath\,\mathrm{sen}\,\varphi)$

$T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m(\dot s^2 + s^2\dot\varphi^2)$ (non richiesto)

$$V = -g(MR + ms)\cos\varphi + \frac{1}{2}ks^2 + \frac{1}{2}(2R\cos\varphi)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = g(MR+ms)\sin\varphi - 2R^2\cos\varphi\sin\varphi \qquad \frac{\partial V}{\partial s} = -mg\cos\varphi + ks$$

$$V_{\varphi\varphi} = g(MR+ms)\cos\varphi - 2R^2\cos 2\varphi \qquad V_{ss} = k$$

$$V_{s\varphi} = mg\sin\varphi$$

$$\begin{cases} ks - mg\cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi\{g(MR+s) - 2R^2\cos\varphi\} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} s = \frac{mg}{k}\cos\varphi \\ \sin\varphi\left\{\left(\frac{mg^2}{k} - 2R^2\right)\cos\varphi + MgR\right\} = 0 \end{cases}$$

(1) $\sin\varphi = 0 \quad \varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \quad s = \begin{cases} mg/k \\ -mg/k \end{cases}$ NON ACC. $\quad T_1 \equiv \left(0, \frac{mg}{k}\right)$

(2) $\cos\varphi = \dfrac{MgR}{2R^2 - \frac{mg^2}{k}} = \dfrac{MgkR}{2kR^2 - mg^2}$ $\quad$ cond. $\left|\dfrac{MgkR}{2kR^2 - mg^2}\right| \le 1$

$$\varphi_0 = \cos^{-1}\frac{MgkR}{2kR^2 - mg^2}$$

$T_2 = (\varphi_0, s_0) \quad T_3 = (-\varphi_0, s_0)$

$$s_0 = \frac{mMg^2R}{2kR^2 - mg^2}$$

$$T_1 \rightarrow \begin{pmatrix} g\left(MR + \frac{m^2g}{k}\right) - 2R^2 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

stabile se $g\left(MR + \frac{m^2g}{k}\right) - 2R^2 > 0$

etc.

---

(4) Quadrato $\quad I_{33} = \frac{2}{3}m_Q L^2 \quad I_{11} = I_{22} = \frac{1}{3}m_Q L^2 \quad I_{12} = 0$

Cerchio $\quad I_{11} = \frac{1}{16}m_c L^2 + m_c\frac{L^2}{4} = \frac{5}{16}m_c L^2 = I_{22}$

$$I_{33} = \frac{5}{8}m_c L^2 \qquad I_{12} = -m_c\frac{L^2}{4}$$

$$\begin{cases} m_Q - m_c = M \\ \dfrac{m_Q}{m_c} = \dfrac{16}{\pi} \end{cases} \qquad \begin{cases} m_c = \dfrac{\pi}{16-\pi}M \\ m_Q = \dfrac{16}{16-\pi}M \end{cases}$$

Totali $\quad I_{11} = \frac{1}{3}m_Q L^2 - \frac{1}{16}m_c L^2 = \frac{M}{16-\pi}\left(\frac{16}{3} - \frac{\pi}{16}\right)L^2 = I_{22}$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} \qquad I_{12} = -\frac{1}{4}\frac{\pi}{16-\pi}ML^2$$