Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009
Meccanica Razionale

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 21 marzo 2009

1. *(i)* (4 punti) Enunciare e dimostrare le formule di Poisson per le derivate temporali dei versori di un sistema mobile;

   (ii) (4 punti) determinare la velocità angolare di un'asta AB libera di ruotare attorno all'estremo A, a sua volta vincolato a scorrere sulla circonferenza di centro l'origine e raggio R (si introducano le coordinate lagrangiane e si esprima la velocità angolare in funzione delle velocità generalizzate).

2. Un'asta materiale pesante AB di massa m e lunghezza L si muove nel piano verticale $O(x, y)$. L'estremo A è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea r, che ruota attorno all'origine con velocità angolare costante ω. L'asta è libera di ruotare attorno ad A.

   (i) (1 punto) Determinare il numero di gradi di libertà ed introdurre le coordinate lagrangiane;

   (ii) (3 punti) scrivere l'energia cinetica del sistema;

   (iii) (2 punti) scrivere l'energia potenziale del sistema;

   (iv) (3 punti) scrivere le equazioni di Lagrange.

3. *(i)* (1 punto) Fornire la definizione di campo conservativo;

   (ii) (1 punti) dimostrare il teorema di conservazione dell'energia per un punto materiale non vincolato sottoposto ad un campo conservativo;

   (iii) (1 punti) dimostrare che un campo conservativo è irrotazionale;

   (iv) (1 punti) enunciare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un campo irrotazionale sia conservativo;

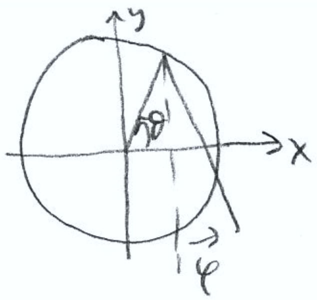
   (v) (3 punti) è dato il campo di forze

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \hat{\mathbf{i}}\, f(y, z) + \hat{\mathbf{j}}\, g(x, z) + \hat{\mathbf{k}}\, h(z)$$

   definito nello spazio $\mathbb{R}^3$, con f, g ed h funzioni continue e derivabili in tutto il loro dominio; determinare le condizioni sulle tre funzioni affinchè tale campo sia conservativo.

4. (8 punti) Un punto materiale P di massa m scorre senza attrito lungo una guida rettilinea r nel piano orizzontale $O(x, y)$. La guida ruota attorno all'origine con velocità angolare costante ω e sul punto P agisce la forza di una molla di centro l'origine e costante elastica $k > 0$. Determinare il moto del punto P e tracciarne le orbite di fase. Si supponga $k \neq m\,\omega^2$ e si discutano separatamente i due casi $k < m\,\omega^2$ e $k > m\,\omega^2$.

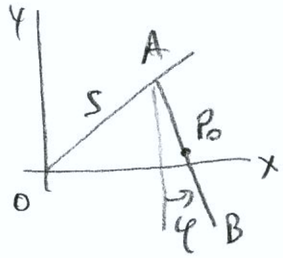
1) (ii)



$$\underline{\omega} = \dot\varphi\, \hat k$$

---

2)



$$P_0 - O = \frac{L}{2}\left(\hat\imath \,\mathrm{sen}\,\varphi - \hat\jmath \cos\varphi\right) + s\left(\hat\imath \cos\omega t + \hat\jmath\, \mathrm{sen}\,\omega t\right)$$

$$\underline{v}_0 = \frac{L}{2}\dot\varphi\left(\hat\imath\cos\varphi + \hat\jmath\,\mathrm{sen}\,\varphi\right) + \dot s\left(\hat\imath\cos\omega t + \hat\jmath\,\mathrm{sen}\,\omega t\right) +$$
$$+ s\omega\left(-\hat\imath\,\mathrm{sen}\,\omega t + \hat\jmath\cos\omega t\right)$$

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m L^2\right)\dot\varphi^2 = \frac{1}{2} m\left\{\left(\frac{L}{2}\dot\varphi\cos\varphi + \dot s\cos\omega t - s\omega \sin\omega t\right)^2 +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{L}{2}\dot\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi + \dot s\sin\omega t + s\omega\cos\omega t\right)^2 + \frac{1}{12}L^2\dot\varphi^2\right\} =$$
$$= \frac{1}{2} m\left\{\frac{1}{3}L^2\dot\varphi^2 + \dot s^2 + s^2\omega^2 + L\dot\varphi\dot s\cos(\varphi-\omega t) + L\dot\varphi\omega s\,\mathrm{sen}(\varphi-\omega t)\right\}$$

$$V = mg\left(s\sin\omega t - \frac{L}{2}\cos\varphi\right) \qquad \mathcal{L} = T - V$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot s} = m\dot s + \frac{mL}{2}\dot\varphi\cos(\varphi-\omega t) \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} = ms\omega^2 + \frac{mL}{2}\dot\varphi\omega\,\mathrm{sen}(\varphi-\omega t) - mg\sin\omega t$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = \frac{mL^2}{3}\dot\varphi + \frac{mL}{2}\left[\dot s\cos(\varphi-\omega t) + \omega s\sin(\varphi-\omega t)\right] \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{mL}{2}\left[\dot\varphi\omega s\cos(\varphi-\omega t) +\right.$$
$$\left. - \dot\varphi\dot s\sin(\varphi-\omega t)\right] +$$
$$- \frac{mgL}{2}\sin\varphi$$

$$m\ddot s + \frac{mL}{2}\left[\ddot\varphi\cos(\varphi-\omega t) - \dot\varphi(\dot\varphi - \cancel{\omega})\sin(\varphi-\omega t)\right] =$$
$$= ms\omega^2 + \cancel{\frac{mL}{2}\dot\varphi\omega\sin(\varphi-\omega t)} - mg\sin\omega t$$

$$\frac{mL^2}{3}\ddot\varphi + \frac{mL}{2}\left\{\left[\ddot s - \omega s(\dot\varphi-\omega)\right]\cos(\varphi-\omega t) + \left[-\dot s(\cancel{\dot\varphi}-\omega) + \omega\dot s\right]\sin(\varphi-\omega t)\right\} =$$
$$= \frac{mL}{2}\dot\varphi\left[\omega s\cos(\varphi-\omega t) - \cancel{\dot s\sin(\varphi-\omega t)}\right] - \frac{mgL}{2}\sin\varphi$$

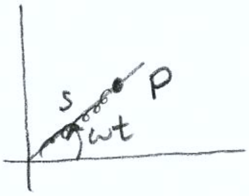
3) $\underline{\nabla} \times \underline{F} = -\frac{\partial g}{\partial z}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\jmath} + \hat{k}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Deve essere $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ e $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$

cioè f e g costanti

---

4)



$T = \frac{1}{2} m \dot{P}^2 = \frac{1}{2} m \left[\dot{s}^2 + s^2\omega^2\right]$

$V = \frac{1}{2} k s^2$

$\mathcal{L} = T - V$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}$ $\qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = m\omega^2 s - ks$

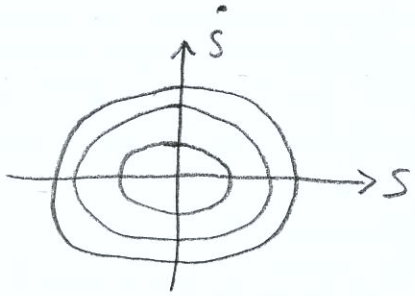
$m\ddot{s} = (m\omega^2 - k)s$

$$\frac{k}{m} - \omega^2 \equiv \begin{cases} \Omega^2, & k > m\omega^2 \\ -\Omega^2, & k < m\omega^2 \end{cases}$$

- $\ddot{s} + \Omega^2 s = 0$

  $s(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t$

  $\dot{s}(t) = \Omega(-A\sin\Omega t + B\cos\Omega t)$



- $\ddot{s} - \Omega^2 s = 0$

  $s(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}$

  $\dot{s}(t) = \Omega(Ae^{\Omega t} - Be^{-\Omega t})$