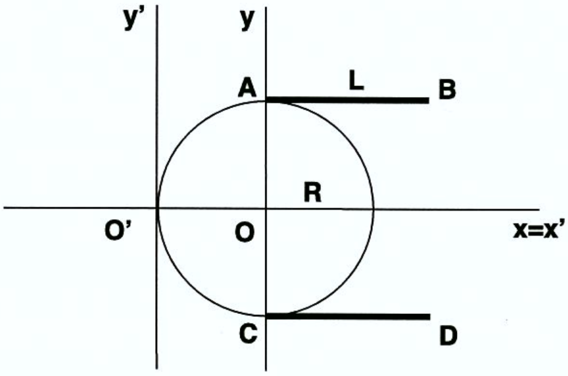
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009
Meccanica Razionale

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 17 dicembre 2008

1. (7 punti) Un corpo rigido è formato da un cerchio di raggio R e massa M e da due aste, AB e CD, di lunghezza l e massa m, saldate in A ed in C a punti diametralmente opposti del bordo del disco come in figura.

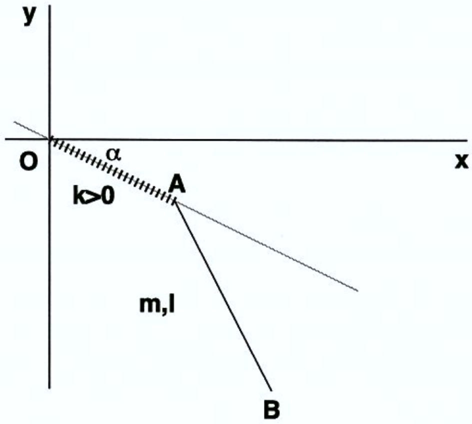


   (i) Nel sistema di riferimento solidale $O(x, y, z)$ mostrato in figura (con l'asse z ortogonale al piano della figura), determinare le direzioni principali d'inerzia sulla base delle simmetrie materiali;

   (ii) calcolare la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento solidale $O'(x', y', z')$ utilizzando il più possibile il teorema di Huygens.

2. (8 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Mozzi sulla cinematica dei moti rigidi.

3. (8 punti) Un'asta AB, di lunghezza l e massa m, mobile nel piano verticale $O(x,y)$, è libera di ruotare attorno all'estremo A, a sual volta vincolato a scorrere su una guida formante un angolo α con l'orizzontale (vedi figura). Oltre



alla forza di gravità, sull'asta agisce anche una molla, che collega l'estremo A con l'origine O.

   (i) Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane;

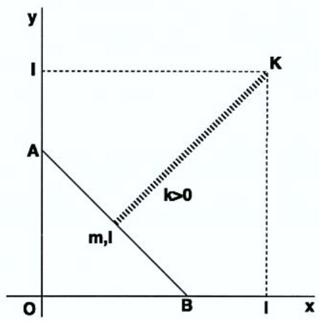
   (ii) scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale;

   (iii) scrivere le equazioni di Lagrange.

4. (7 punti)

   (i) Enunciare il criterio di Dirichlet per la stabilità di una configurazione di equilibrio e dimostrarlo per un sistema ad un grado di libertà.

   (ii) Un'asta AB di massa m e lunghezza l si muove nel piano verticale $O(x,y)$, con gli estremi A e B vincolati a scorrere rispettivamente sull'asse y e sull'asse x. Oltre alla forza di gravità, sull'asta agisce una molla di costante elastica $k > 0$ che collega il centro di massa P_0 con il punto K di coordinate (l,l). Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere



   le coordinate lagrangiane; scrivere l'energia potenziale; determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

5. (Domanda supplementare) Nell'esercizio 4, calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

1) Il sistema $O(x,y,z)$ è principale d'inerzia.

$$I_{11} = I_{11}^{disco} + 2\, I_{11}^{asta} = \frac{1}{4} MR^2 + 2mR^2 = \left(\frac{M}{4} + 2m\right) R^2$$

$$I_{22} = I_{22}^{disco} + 2\, I_{22}^{asta} = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{2}{3} m \ell^2$$

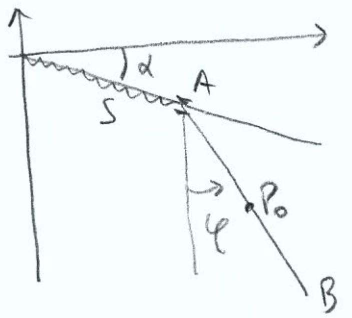
$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{M}{2} R^2 + 2m\left(R^2 + \frac{\ell^2}{3}\right)$$

$$I'_{11} = I_{11} \; ; \quad I'_{22} = \left(\frac{1}{4} MR^2 + MR^2\right) + 2\left[\frac{1}{3} m\ell^2 - m\frac{\ell^2}{4} + m\left(R + \frac{\ell}{2}\right)^2\right]$$

$$I'_{33} = I'_{11} + I'_{22}$$

---

3) (i)



2 gradi di libertà $\quad q_1 = s \quad q_2 = \varphi$

$$P_0 - O = \left(s\cos\alpha + \frac{\ell}{2}\sin\varphi\right)\hat{i} - \left(s\sin\alpha - \frac{\ell}{2}\cos\varphi\right)\hat{j}$$

$$\underline{v}_0 = \left(\dot{s}\cos\alpha + \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\hat{i} - \left(\dot{s}\sin\alpha + \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\hat{j}$$

(ii) $$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m\ell^2\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m\left\{\dot{s}^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\varphi}^2 + \ell\dot{s}\dot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi) + \frac{1}{12}\ell^2\dot{\varphi}^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} m\left\{\dot{s}^2 + \frac{1}{3}\ell^2\dot{\varphi}^2 + \ell\dot{s}\dot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi)\right\} \; ; \quad V = \frac{1}{2}ks^2 - mg\left(s\sin\alpha + \frac{\ell}{2}\sin\varphi\right)$$

(iii) $\mathcal{L} = T - V \qquad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} + \dfrac{m\ell}{2}\dot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi) \qquad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = -ks + mg\sin\alpha$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\varphi} + \frac{m\ell}{2}\dot{s}\cos(\alpha-\varphi) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = +\frac{m\ell}{2}\dot{s}\dot{\varphi}\sin(\alpha-\varphi) + \frac{mg\ell}{2}\cos\varphi$$

$$\begin{cases} m\ddot{s} + \dfrac{m\ell}{2}\left[\ddot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin(\alpha-\varphi)\right] + ks - mg\sin\alpha = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{3}m\ell^2\ddot{\varphi} + \dfrac{m\ell}{2}\left[\ddot{s}\cos(\alpha-\varphi) + \cancel{\dot{s}\dot{\varphi}\sin(\alpha-\varphi)}\right] - \cancel{\dfrac{m\ell}{2}\dot{s}\dot{\varphi}\sin(\alpha-\varphi)} + \dfrac{mg\ell}{2}\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

(iv) $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0 \qquad \varphi = \text{costante}$

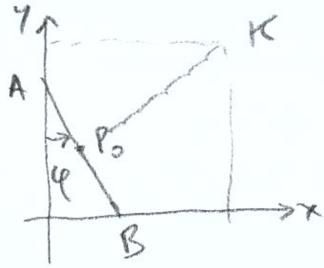
$$\begin{cases} m\ddot{s} + ks = mg\sin\alpha \\[1ex] \dfrac{m\ell}{2}\ddot{s}\cos(\alpha-\varphi) + \dfrac{mg\ell}{2}\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{s} = -g\frac{\cos\varphi}{\cos(\alpha-\varphi)}$$

$$-mg\frac{\cos\varphi}{\cos(\alpha-\varphi)} + ks = mg\sin\alpha$$

$$s = \frac{mg}{k}\left[\sin\alpha + \frac{\cos\varphi}{\cos(\alpha-\varphi)}\right]$$

4)



$$l=1;\quad q=\varphi$$

$$V = mg\frac{l}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}k\,(K-P_0)^2$$

$$K-P_0 = \left(l-\frac{l}{2}\sin\varphi\right)\hat{i} + \left(l-\frac{l}{2}\cos\varphi\right)\hat{j} \qquad (K-P_0)^2 = l^2+\frac{l^2}{4} - l^2(\sin\varphi+\cos\varphi)$$

$$V \doteq mg\frac{l}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}kl^2(\sin\varphi+\cos\varphi) = \frac{mg-kl}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}kl^2\sin\varphi$$

$$V'(\varphi) = \frac{kl-mg}{2}l\sin\varphi - \frac{1}{2}kl^2\cos\varphi \qquad V'(\varphi)=0 \qquad \tan\varphi = \frac{kl}{kl-mg} = \frac{1}{1-\lambda}$$

$\lambda<1$ $\quad \varphi=\varphi_0,\ \varphi_0+\pi$

$\lambda>1$:

$$V''(\varphi) = \frac{kl-mg}{2}l\cos\varphi + \frac{1}{2}kl^2\sin\varphi = \frac{kl-mg}{2}l\cos\varphi\left[1+\frac{1}{2}\frac{kl}{kl-mg}\tan\varphi\right] =$$

$$= kl^2\,\frac{1-\lambda}{2}\cos\varphi\left[1+\frac{1}{2}\tan^2\varphi\right]$$

$\lambda<1$ $\begin{cases} \varphi_0 \text{ STABILE} \\ \varphi_0+\pi \text{ INSTABILE} \end{cases}$ $\qquad$ $\lambda>1$ $\begin{cases} \varphi_0 \text{ INSTABILE} \\ \varphi_0+\pi \text{ STABILE} \end{cases}$