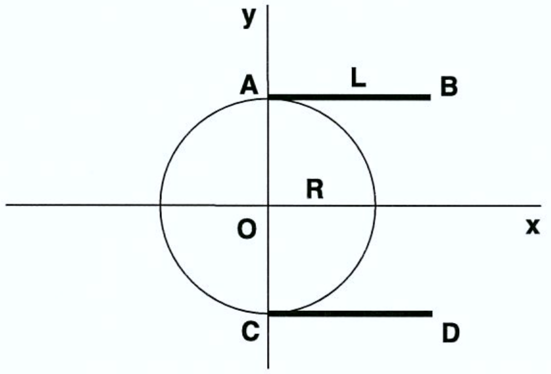
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009
Meccanica Razionale

Nome:.................................

N. matr.:.................................   Ancona, 12 dicembre 2008

1. (7 punti) Un corpo rigido è formato da un cerchio di raggio R e massa M e da due aste, AB e CD, di lunghezza l e massa m, saldate in A ed in C a punti diametralmente opposti del bordo del disco come in figura.



   (i) Nel sistema di riferimento solidale $O(x, y, z)$ mostrato in figura (con l'asse z ortogonale al piano della figura), determinare le direzioni principali d'inerzia sulla base delle simmetrie materiali;

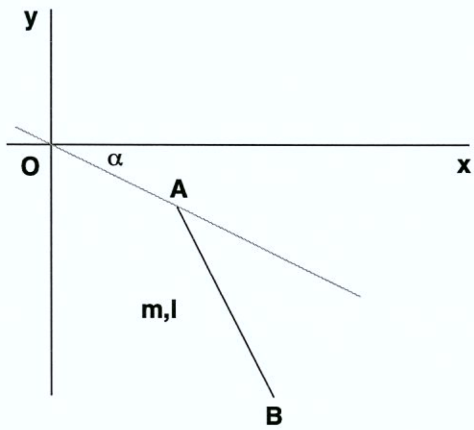
   (ii) calcolare la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento solidale $O(x, y, z)$ utilizzando il più possibile il teorema di Huygens.

2. (8 punti) Enunciare e dimostrare le formule di Poisson per le derivate temporali dei versori solidali di un sistema rigido e ricavare la formula fondamentale dei moti rigidi.

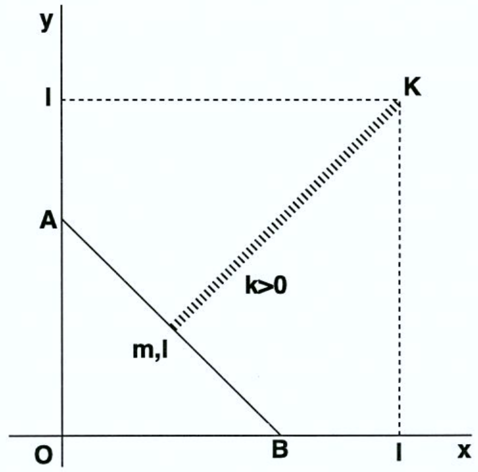
3. (7 punti)

(i) Enunciare e dimostrare il teorema di König per l'energia cinetica di un sistema di punti materiali;

(ii) utilizzando il teorema di König, scrivere l'energia cinetica di un'asta AB, di lunghezza l e massa m, libera di ruotare attorno all'estremo A, a sual volta vincolato a scorrere su una guida formante un angolo α con l'orizzontale (vedi figura).



4. (8 punti) Un'asta AB di massa m e lunghezza l si muove nel piano verticale $O(x, y)$, con gli estremi A e B vincolati a scorrere rispettivamente sull'asse y e sull'asse x. Oltre alla forza di gravità, sull'asta agisce una molla di costante elastica $k > 0$ che collega il centro di massa P_0 con il punto K di coordinate (l, l) ed una forza viscosa applicata al punto B, $\mathbf{F}_B = -\lambda \mathbf{v}_B$, con $\lambda > 0$.



(i) Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane;

(ii) scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale;

(iii) scrivere le equazioni di Lagrange;

5. (Domanda supplementare) Nell'esercizio 4, posto $mg = 2kl$, determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità utilizzando il primo criterio di Lyapunov.

1) (i) $O(x,y,z)$ è principale d'inerzia

(ii) $\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}(\text{disco}) + \underline{\underline{I}}(\text{aste})$

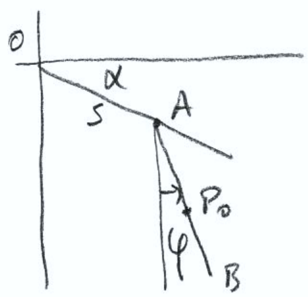
$$I_{11} = \frac{1}{4}MR^2 + 2\cdot mR^2 = \left(\frac{M}{4}+2m\right)R^2$$

$$I_{22} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{2}{3}mL^2 \qquad I_{33} = I_{11}+I_{22}$$

$$I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$$

---

3) (ii)



$$P_0 - O = \left(s\cos\alpha + \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\varphi\right)\hat{\imath} - \left(s\operatorname{sen}\alpha + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\right)\hat{\jmath}$$

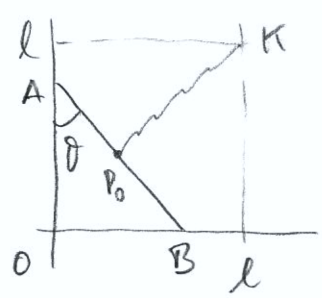
$$\underline{v}_0 = \left(\dot{s}\cos\alpha + \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\hat{\imath} - \left(\dot{s}\operatorname{sen}\alpha - \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\right)\hat{\jmath}$$

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m\ell^2\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m\left\{\dot{s}^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\varphi}^2 + \ell\dot{s}\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{12}\ell^2\dot{\varphi}^2\right\} = \frac{1}{2}m\left\{\dot{s}^2 + \frac{\ell^2}{3}\dot{\varphi}^2 + \ell\dot{s}\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi)\right\}$$

---

4)



(i) $\ell = 1 \qquad q = \theta$

(ii) $P_0 - O = \frac{\ell}{2}\left(\hat{\imath}\operatorname{sen}\theta + \hat{\jmath}\cos\theta\right)$

$\underline{v}_0 = \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\left(\hat{\imath}\cos\theta - \hat{\jmath}\operatorname{sen}\theta\right)$

$$B - O = \ell\hat{\imath}\operatorname{sen}\theta \qquad \underline{v}_B = \ell\dot{\theta}\hat{\imath}\cos\theta$$

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m\ell^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left\{\frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{12}\ell^2\dot{\theta}^2\right\} = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

$$V = mg\frac{\ell}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k(K-P_0)^2 = mg\frac{\ell}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k\ell^2\left[\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right)^2 + \left(1-\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2\right] = \circledast$$

$$\mathcal{L} = T - V \ ; \quad Q_\theta = -\lambda\underline{v}_B\cdot\frac{\partial B}{\partial\theta} = -\lambda\ell\dot{\theta}\hat{\imath}\cos\theta\cdot(\ell\hat{\imath}\cos\theta) = -\lambda\ell^2\dot{\theta}\cos^2\theta$$

$$\circledast = mg\frac{\ell}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k\ell^2\left[\frac{5}{2} - (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)\right] \doteq \frac{\ell}{2}(mg - k\ell)\cos\theta - \frac{1}{2}k\ell^2\operatorname{sen}\theta$$

4 (cont.) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = \frac{1}{3} m \ell^2 \dot\theta$ $\qquad$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{\ell}{2}(mg - k\ell)\sin\theta + \frac{1}{2} k\ell^2 \cos\theta$

Eq. di Lagrange: $\frac{1}{3} m\ell^2 \ddot\theta - \frac{\ell}{2}(mg - k\ell)\sin\theta - \frac{1}{2} k\ell^2\cos\theta = -\lambda \ell^2 \dot\theta \cos^2\theta$

5) $\dot\theta = \Omega$

$$\begin{cases} \dot\theta = \Omega \\ \dot\Omega = \frac{3}{m\ell^2}\left\{ \frac{\ell}{2}(mg - k\ell)\sin\theta + \frac{1}{2} k\ell^2\cos\theta - \lambda \ell^2 \Omega \cos^2\theta \right\} \end{cases}$$

$$= \frac{3}{m\ell^2}\left\{ \frac{1}{2} k\ell^2(\sin\theta + \cos\theta) - \lambda \ell^2 \Omega \cos^2\theta \right\} =$$

Punti critici: $\begin{cases} \Omega = 0 \\ \tan\theta = -1 \end{cases}$ $\quad \theta = \frac{3}{4}\pi \;\text{ e }\; \frac{7}{4}\pi$

$\left(\cos\theta = -\frac{\sqrt2}{2} \;;\; \frac{\sqrt2}{2}\right)$

$\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial \Omega} = 1$

$\frac{\partial f_2}{\partial \theta} = \frac{3}{m}\left\{ \frac{1}{2} k(\cos\theta - \sin\theta) + 2\lambda\Omega\cos\theta\sin\theta \right\} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \Omega} = -\frac{3\lambda}{m}\cos^2\theta$

$\theta = \frac{3}{4}\pi \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = \frac{3}{m}\left(-\frac{1}{2} k\sqrt2\right)$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{2}\frac{k\sqrt2}{m} & -\frac{3\lambda}{2m} \end{pmatrix}$

Autovalori $-\rho\left(-\rho - \frac{3\lambda}{2m}\right) + \frac{3\sqrt2}{2}\frac{k}{m} = 0$

$\rho^2 + \frac{3\lambda}{2m}\rho + \frac{3\sqrt2}{2}\frac{k}{m} = 0 \qquad \rho_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{3\lambda}{2m} \pm \sqrt{\frac{9\lambda^2}{4m^2} - 6\sqrt2\frac{k}{m}} \right]$

STABILE

$\theta = \frac{7}{4}\pi \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = \frac{3\sqrt2}{2}\frac{k}{m}$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3\sqrt2}{2}\frac{k}{m} & -\frac{3\lambda}{2m} \end{pmatrix}$

$\rho^2 + \frac{3\lambda}{2m}\rho - \frac{3\sqrt2}{2}\frac{k}{m} = 0 \qquad \rho_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{3\lambda}{2m} \pm \sqrt{\frac{9\lambda^2}{4m^2} + 6\sqrt2\frac{k}{m}} \right]$

INSTABILE