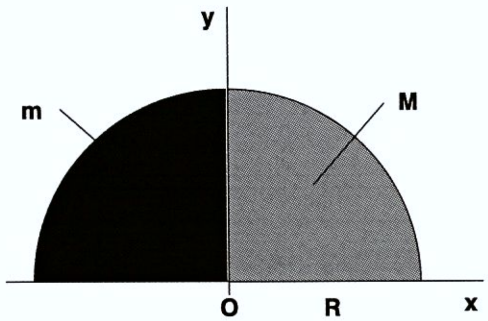
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009
Meccanica Razionale

Nome:...............................

N. matr.:............................... Ancona, 10 gennaio 2009

1. *(i)* (3 punti) Fornire la definizione di piano di simmetria materiale per un sistema rigido e dimostrare che una retta perpendicolare ad un piano di simmetria materiale è asse principale d'inerzia;

   (ii) (4 punti) Un corpo rigido è formato da un semicerchio non omogeneo di raggio R; il quarto di cerchio a sinistra dell'asse di simmetria ha massa m ed il quarto a destra ha massa M.



   - Calcolare la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento solidale $O(x, y, z)$ mostrato in figura (con l'asse z ortogonale al piano della figura);
   - individuare le direzioni principali d'inerzia sulla base delle simmetrie materiali e calcolare tutti gli elementi della matrice d'inerzia in tale sistema di riferimento.

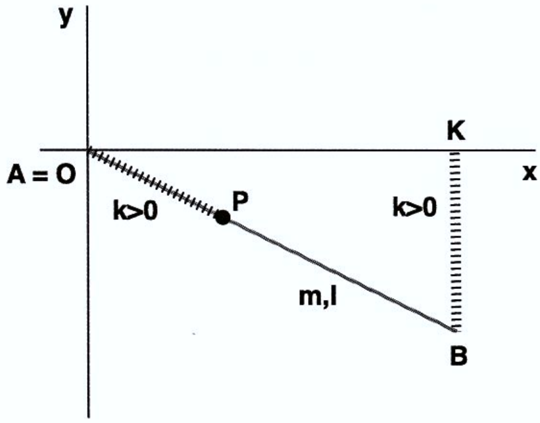
2. *(i)* (3 punti) Fornire la definizione di campo conservativo, introdurre la funzione potenziale, enunciare il teorema sulla relazione tra conservatività ed irrotazionalità e dimostrarne la necessità.

   (ii) (4 punti) Dato il campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y\,\hat{\mathbf{i}} + x\,\hat{\mathbf{j}}}{x^2 + y^2},$$

   - verificare se è irrotazionale;
   - verificare se è conservativo ed in caso affermativo calcolarne il potenziale.

3. Un'asta AB, di lunghezza l e massa m, mobile nel piano verticale $O(x, y)$, è libera di ruotare attorno all'estremo A, fisso nell'origine. Un punto P di massa m scorre senza attrito lungo l'asta (vedi figura). Due molle, di costante elastica $k > 0$, collegano il punto P con l'origine O e l'estremo B dell'asta con la sua proiezione ortogonale K sull'asse x.



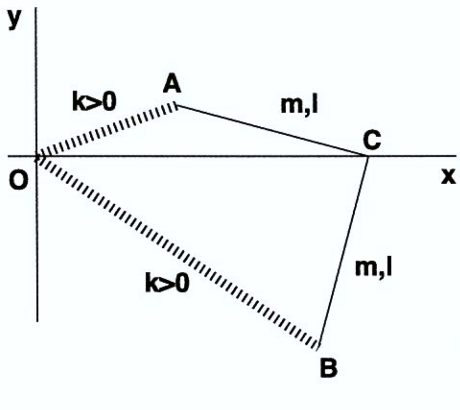
(i) (1 punto) Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane;

(ii) (2 punti) scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale;

(iii) (2 punti) posto $mg = 2kl$, determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità;

(iv) (3 punti) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile, sempre per $mg = 2kl$.

4. Un sistema rigido è costituito da due aste AC e BC, di massa m e lunghezza l, saldate ad angolo retto in C e libere di muoversi nel piano orizzontale $O(x, y)$. L'estremo C scorre senza attrito sull'asse x e le due aste sono libere di ruotare attorno a C.



(i) (1 punto) Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane;

(ii) (4 punti) scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale;

(iii) (3 punti) scrivere le equazioni di Lagrange.

5. (Domanda supplementare) Nell'esercizio 4, verificare se sono possibili moti in cui l'inclinazione delle aste rispetto all'asse x rimane costante.

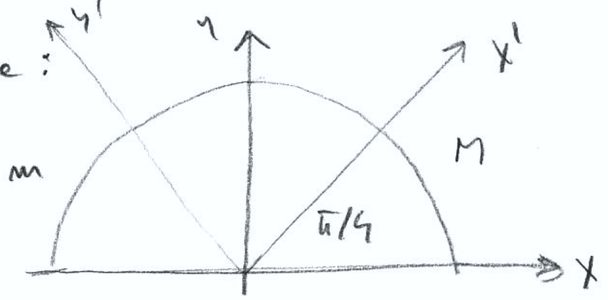
1) $$I_{11} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr\, \sigma_1 r^3 \sin^2\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^R dr\, \sigma_2 r^3 \sin^2\varphi =$$

$$= \frac{R^4}{4}\frac{\pi}{4}(\sigma_1+\sigma_2) = \frac{1}{4}(M+m)R^2 = I_{22} \qquad I_{33} = \frac{1}{2}(M+m)R^2$$

$$I_{12} = -\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr\, \sigma_1 r^3 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi - \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^R dr\, \sigma_2 r^3 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi =$$

$$= -\frac{R^4}{4}\left\{\sigma_1 \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2} - \sigma_2 \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right\} = -\frac{MR^2}{\pi}\cdot\frac{1}{2} + \frac{mR^2}{\pi}\frac{1}{2} = -\frac{R^2}{2\pi}(M-m)$$

Terna principale d'inerzia:



$$I'_{11} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^R dr\, \sigma_1 r^3 \sin^2\varphi + \int_{\pi/4}^{\frac{3}{4}\pi} d\varphi \int_0^R dr\, \sigma_2 r^3 \sin^2\varphi =$$

$$= \frac{R^4}{4}\sigma_1 \frac{\pi-2}{4} + \frac{R^4}{4}\sigma_2 \frac{\pi+2}{4} = \frac{1}{4}\left[\frac{\pi-2}{\pi}M + \frac{\pi+2}{\pi}m\right]R^2$$

$$I'_{22} = \frac{1}{4}\left[\frac{\pi+2}{\pi}M + \frac{\pi-2}{\pi}m\right]R^2 \qquad I'_{33} = I'_{11} + I'_{22}$$

2) $$\underline{F} = \frac{-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}}{x^2+y^2} \qquad \underline{\nabla}\times\underline{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{x=y=0\}$

NON È SEMPL. CONN.

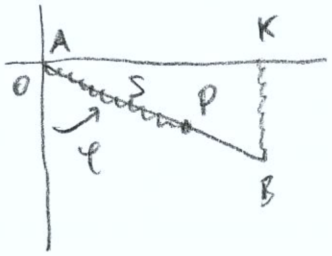
$$= \frac{y^2-x^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Circuitazione su circonf. di raggio 1 e centro l'origine

$$\oint \underline{F}\cdot d\underline{P} = \int_0^{2\pi} \underline{F}\cdot(-\hat{\imath}\operatorname{sen}\varphi + \hat{\jmath}\cos\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi\right]d\varphi = 2\pi \neq 0$$

NON CONS.

3)



$l = 2 : \varphi, s$

$P - O = s(\hat{\imath}\,\text{sen}\,\varphi - \hat{\jmath}\cos\varphi)$

$\dot{P} = \dot{s}(\hat{\imath}\,\text{sen}\,\varphi - \hat{\jmath}\cos\varphi) + s\dot{\varphi}(\hat{\imath}\cos\varphi + \hat{\jmath}\,\text{sen}\,\varphi)$

$T = \frac{1}{2} m \dot{P}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2$

$$T = \frac{1}{2} m \{\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2\} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m l^2\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m \left\{\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3} l^2 \dot{\varphi}^2\right\}$$

$$V = -mg\, s\cos\varphi - mg\frac{l}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left[s^2 + l^2\cos^2\varphi\right]$$

$\boxed{mg = 2kl}$ $\quad V = -kl(2s+l)\cos\varphi + \frac{1}{2}k(s^2 + l^2\cos^2\varphi)$

$\frac{\partial V}{\partial s} = -2kl\cos\varphi + ks \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = kl(2s+l)\,\text{sen}\,\varphi - kl^2\cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi$

$V_{ss} = k; \; V_{s\varphi} = 2kl\,\text{sen}\,\varphi \; ; \; V_{\varphi\varphi} = kl(2s+l)\cos\varphi - kl^2(\cos^2\varphi - \text{sen}^2\varphi)$

$$\begin{cases} ks - 2kl\cos\varphi = 0 \\ [kl(2s+l) - kl^2\cos\varphi]\,\text{sen}\,\varphi = 0 \end{cases}$$

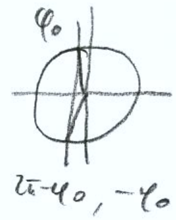
1. $\text{sen}\,\varphi = 0 \quad \varphi = 0, \pi$

$s = 2l\cos\varphi = \pm 2l$

$\Gamma_1 \equiv (0, 2l) \qquad \Gamma_2 \equiv (\pi, -2l)$

2. $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{s}{2l} \\ kl(2s+l) - \frac{kl}{2}s = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{3}{2}s + l = 0 \qquad s = -\frac{2}{3}l$

$\cos\varphi = -\frac{1}{3}$



$\Gamma_3 = \left(\varphi_0, -\frac{l}{4}\right) \qquad \Gamma_4 = \left(-\varphi_0, -\frac{l}{4}\right)$

$\Gamma_1 \rightarrow \quad V_{ss} = k \quad V_{s\varphi} = 0 \quad V_{\varphi\varphi} = 5kl^2 - kl^2 = 4kl^2$ STABILE

$\Gamma_2 \rightarrow \quad$ " $\quad$ " $\quad V_{\varphi\varphi} = 3kl^2 - kl^2 = 2kl^2$ STABILE

$\Gamma_3 \rightarrow \quad$ " $\quad V_{s\varphi} = 2kl\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = 2kl\frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad V_{\varphi\varphi} = kl\frac{l}{2}\left(-\frac{1}{3}\right) - kl^2\left(\frac{2}{9} - 1\right) =$

$= \left(\frac{7}{9} - \frac{1}{6}\right)kl^2 = \frac{11}{18}kl^2$ INST.

$\det = \frac{11}{18}k^2l^2 - \frac{8}{9}kl^2 = -\frac{5}{18}kl^2 < 0$

$\Gamma_4 \rightarrow \quad$ " $\quad V_{s\varphi} = -\frac{4}{3}\sqrt{2}kl \qquad V_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{3}kl\frac{l}{2} - kl^2\left(\frac{2}{9} - 1\right) = \left(\frac{7}{9} - \frac{1}{6}\right)kl^2$

come per Γ_3

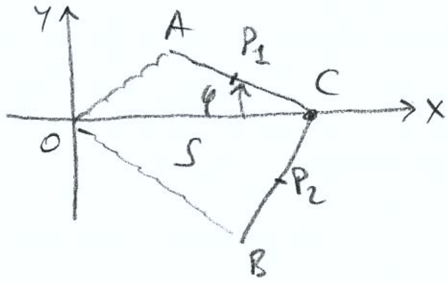
Piccole oscill. attorno a T_1:

$$T = m\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\ell^2 + s^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s=2\ell} m\begin{pmatrix} \frac{13}{3}\ell^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 4k\ell^2 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \qquad |V - \omega^2 T| = \begin{vmatrix} 4k\ell^2 - \frac{13}{3}m\ell^2\omega^2 & 0 \\ 0 & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{12}{13}}\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

4) $\ell = 2$; s, φ



$$T = T_{AC} + T_{BC} =$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{P}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{P}_2^2 + 2\cdot\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{12}m\ell^2\right)\dot\varphi^2$$

$$P_1 - O = \left(s - \frac{\ell}{2}\cos\varphi\right)\hat\imath + \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\varphi\,\hat\jmath \qquad P_2 - O = \left(s - \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\varphi\right)\hat\imath - \frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\hat\jmath$$

$$\dot P_1 = \left(\dot s + \frac{\ell}{2}\dot\varphi\operatorname{sen}\varphi\right)\hat\imath + \frac{\ell}{2}\dot\varphi\cos\varphi\,\hat\jmath \qquad \dot P_2 = \left(\dot s - \frac{\ell}{2}\dot\varphi\cos\varphi\right)\hat\imath + \frac{\ell}{2}\dot\varphi\operatorname{sen}\varphi\,\hat\jmath$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}m\left\{2\dot s^2 + 2\cdot\frac{\ell^2}{4}\dot\varphi^2 + \ell\dot s\dot\varphi(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi) + \frac{1}{6}\ell^2\dot\varphi^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}m\left\{2\dot s^2 + \frac{2}{3}\ell^2\dot\varphi^2 + \ell\dot s\dot\varphi(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi)\right\}$$

$$V = \frac{1}{2}k\left\{2s^2 + 2\ell^2 - 2s\ell(\cos\varphi + \sin\varphi)\right\} \qquad \mathcal{L} = T - V$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot s} = 2m\dot s + \frac{1}{2}m\ell\dot\varphi(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi) \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} = -2ks + k\ell(\cos\varphi + \sin\varphi) +$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = \frac{2}{3}m\ell^2\dot\varphi + \frac{1}{2}m\ell\dot s(\sin\varphi - \cos\varphi) \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{1}{2}m\ell\dot s\dot\varphi(\cos\varphi + \sin\varphi) + ks\ell(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

$$\begin{cases} m\left[2\ddot s + \frac{\ell}{2}\ddot\varphi(\sin\varphi - \cos\varphi) + \frac{\ell}{2}\dot\varphi^2(\cos\varphi + \sin\varphi)\right] + 2ks - k\ell(\cos\varphi + \sin\varphi) = 0 \\ \frac{2}{3}m\ell^2\ddot\varphi + \frac{1}{2}m\ell\left[\ddot s(\sin\varphi - \cos\varphi) + \cancel{\dot s\dot\varphi(\cos\varphi + \sin\varphi)}\right] - \frac{1}{2}m\ell\,\cancel{\dot s\dot\varphi(\cos\varphi + \sin\varphi)} - ks\ell(\cos\varphi + \sin\varphi) = 0 \end{cases}$$

5) $\varphi = \text{cost.}$, $\dot\varphi = \ddot\varphi = 0$

$$\begin{cases} 2m\ddot s + 2ks = kl(\cos\varphi + \sin\varphi) \\ \frac{1}{2}ml\ddot s(\sin\varphi - \cos\varphi) - ksl(\cos\varphi - \sin\varphi) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2m\ddot s + 2ks = kl(\cos\varphi + \sin\varphi) \\ \left(\frac{1}{2}ml\ddot s + ksl\right)(\sin\varphi - \cos\varphi) = 0 \end{cases}$$

① $\sin\varphi = \cos\varphi$ $\qquad \varphi = \frac{\pi}{4}$ o $\frac{5}{4}\pi$

$\Rightarrow 2m\ddot s + 2ks = \pm\sqrt{2}\,kl$ $\qquad$ MOTO ARMONICO ATTORNO A

$s_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} l$

② $\frac{1}{2}ml\ddot s + ksl = 0$ $\qquad \ddot s = -\frac{2k}{m}s$

$2m\left(-\frac{2k}{m}s\right) + 2ks = kl(\cos\varphi + \sin\varphi)$

$-2ks = kl(\cos\varphi + \sin\varphi)$ $\qquad s = -\frac{l}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi) = \text{costante}$

$\Rightarrow \ddot s = 0 \quad \Rightarrow s = 0 \quad \Rightarrow \cos\varphi + \sin\varphi = 0$

$\Rightarrow \varphi = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$