

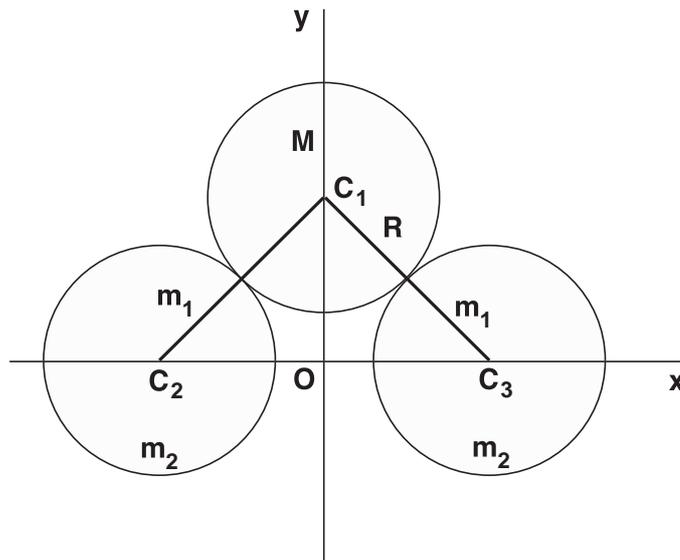
**Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione**  
**Anno Accademico 2007/2008**  
**Meccanica Razionale**

Nome:.....

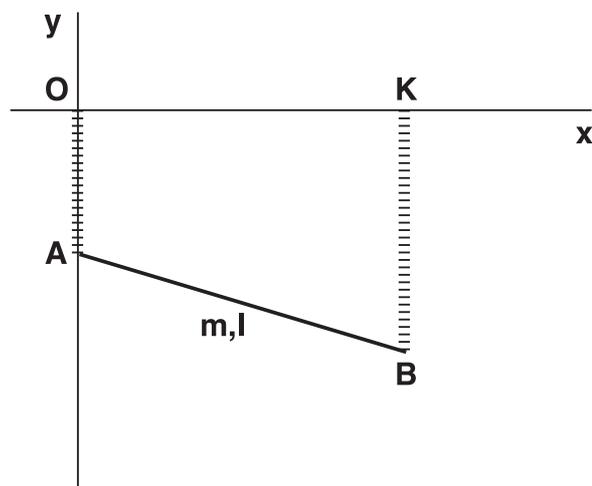
N. matr.:.....

Ancona, 8 gennaio 2008

1. (i) (7 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Huygens nella sua forma più generale.
- (ii) si consideri il sistema rigido mostrato in figura, costituito da tre cerchi di raggio  $R$ , centri  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , con  $\overline{OC_1} = \overline{OC_2} = \overline{OC_3}$ , disposti come in figura nel piano  $O(x, y)$ , di masse rispettivamente  $M$ ,  $m_2$  ed  $m_2$  e dalle due aste  $C_1C_2$  e  $C_1C_3$ , di ugual massa  $m_1$ ; determinare se, in base alle simmetrie materiali, il sistema di riferimento  $O(x, y, z)$ , con l'asse  $z$  ortogonale al piano della figura, è una terna principale d'inerzia e calcolare la matrice d'inerzia in tale sistema, facendo uso il più possibile del teorema di Huygens. *Lo studente può usare i risultati ottenuti a lezione per i momenti d'inerzia notevoli del cerchio e dell'asta.*



2. (5 punti)
  - (i) Fornire una definizione di configurazione di equilibrio per un sistema olonomo ad un grado di libertà, usando a piacere il linguaggio delle equazioni differenziali o il linguaggio dello spazio delle fasi.
  - (ii) Dare la definizione di equilibrio stabile secondo Liapunov; enunciare il criterio di stabilità di Dirichlet e dimostrarlo usando la conservazione dell'energia.
3. (8 punti) Un'asta materiale pesante  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $l$  si muove nel piano verticale  $O(x, y)$ , libera di ruotare attorno all'estremo  $A$ , a sua volta vincolato a scorrere senza attrito sull'asse  $y$  (vedi figura). Due molle di ugual costante elastica  $k > 0$  collegano gli estremi  $A$  e  $B$  rispettivamente con l'origine  $O$  e con il punto  $K$ , proiezione dell'estremo  $B$  sull'asse  $x$ .



- (i) Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane;
  - (ii) scrivere l'energia cinetica del sistema;
  - (iii) scrivere l'energia potenziale del sistema;
  - (iv) determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità;
  - (v) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.
4. (5 punti) Scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema del punto precedente, nell'ipotesi che sull'estremo  $B$  agisca la forza viscosa  $\mathbf{F}_B = -\lambda \mathbf{v}_B$
5. (5 punti)
- (i) Dare la definizione di campo di forze;
  - (ii) dire quando un campo è conservativo;
  - (iii) discutere la relazione tra conservatività ed irrotazionalità (senza dimostrazioni);
  - (iv) è dato il campo vettoriale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{j}};$$

dire se è irrotazionale e se è conservativo giustificando la risposta.