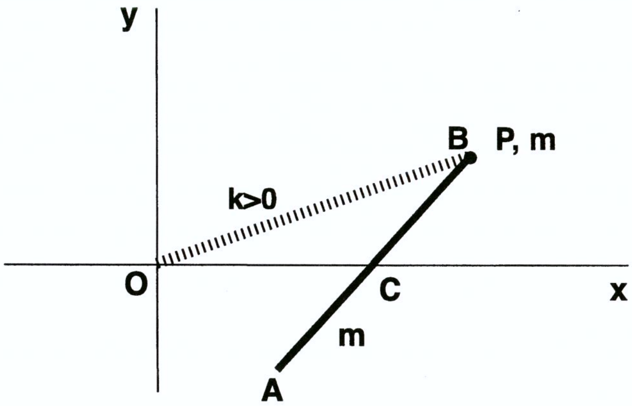
**Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione**
**Anno Accademico 2007/2008**
**Meccanica Razionale**

Nome:...............................

N. matr.:............................... Ancona, 20 ottobre 2008

1. (10 punti) Un punto materiale $P$ di massa $m$ è saldato all'estremo $A$ di un'asta omogenea di lunghezza $l$ e massa $m$, il cui punto medio $C$ scorre senza attrito sull'asse $x$ di un piano cartesiano verticale $O(x, y)$. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto $P$ con l'origine $O$.




   *(i)* Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane;

   *(ii)* scrivere l'energia cinetica del sistema;

   *(iii)* scrivere l'energia potenziale del sistema.

   Posto quindi $m\,g = k\,l$:

   *(iv)* determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità;

   *(v)* calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

2. (7 punti)

   *(i)* Dimostrare che il centro di massa di un insieme di punti materiali $P_1, P_2, \ldots, P_N$, di masse $m_1, m_2, \ldots, m_N$, distribuiti su una stessa retta $r$, o su uno stesso piano $\sigma$ appartiene, rispettivamente, alla retta $r$ ed al piano $\sigma$.

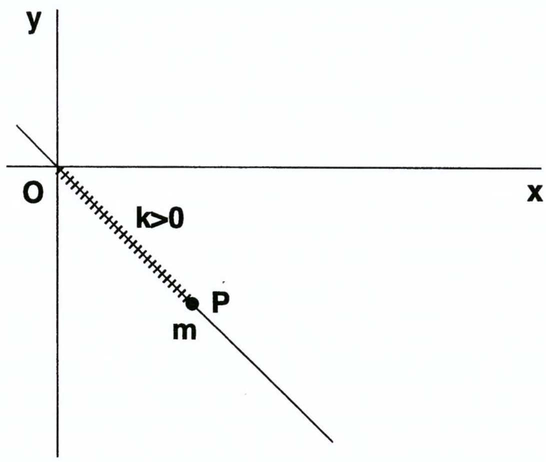
   *(ii)* si consideri un insieme di punti materiali distribuiti su tre piani paralleli equidistanti $\sigma$, $\lambda$ e $\pi$, con $\lambda$ intermedio fra gli altri due, in modo tale che la massa totale dei punti sul piano $\sigma$ sia uguale a quella dei punti sul piano $\pi$. Cosa si può dire del centro di massa del sistema complessivo (giustificare la risposta)?

3. (7 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di König per l'energia cinetica di un sistema di punti materiali. Si consideri quindi un disco omogeneo di raggio $R$ e massa $M$ che rotola senza strisciare lungo una guida rettilinea ed il cui centro di massa si muove ad una velocità costante $v$.

   *(i)* Determinare direzione e modulo della velocità angolare;

   *(ii)* scrivere l'energia cinetica del sistema.

4. (8 punti) Un punto materiale $P$ di massa $m$ si muove nel piano verticale $O(x, y)$ ed è vincolato a scorrere senza attrito sulla retta di equazione $y = -x$. Oltre alla forza di gravità, sul punto $P$ agisce una molla di costante elastica $k > 0$ che collega $P$ con l'origine $O$.




   *(i)* Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane;

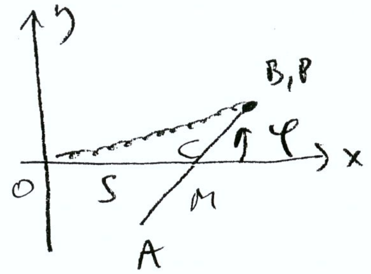
   *(ii)* scrivere l'energia cinetica del sistema;

   *(iii)* scrivere l'energia potenziale del sistema;

   *(iv)* scrivere le equazioni di Lagrange;

   *(v)* risolvere le equazioni di Lagrange, nel caso in cui il punto $P$ si trovi inizialmente nell'origine con velocità nulla e rappresentare il moto del sistema così ottenuto nello spazio delle fasi.

1)




$g d l = 2 \qquad (s, \varphi)$

$$P - O = \left(s + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\right)\hat{\imath} + \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\jmath}$$

$$\dot{P} = \left(\dot{s} - \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\right)\hat{\imath} + \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{\jmath}$$

$$C - O = s\,\hat{\imath} \qquad \dot{C} = \dot{s}\,\hat{\imath} \qquad \underline{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{k}$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{P}^2 + \frac{1}{2} m \dot{C}^2 + \frac{1}{2} I_{33}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m\left(\dot{s}^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\varphi}^2 - \ell\dot{s}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi + \dot{s}^2 + \frac{1}{12}\ell^2\dot{\varphi}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} m\left(2\dot{s}^2 + \frac{1}{3}\ell^2\dot{\varphi}^2 - \ell\dot{s}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\right)$$

$$V = m g y_P + \frac{1}{2} k \overline{OB}^2 = m g \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{2} k\left[s^2 + \frac{\ell^2}{4} - 2 s \frac{\ell}{2}\cos(\pi - \varphi)\right] =$$

$$= m g \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{2} k\left[s^2 + \frac{\ell^2}{4} + s\ell\cos\varphi\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = k s + \frac{1}{2} k \ell \cos\varphi \;\circledast \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = m g \frac{\ell}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2} k s \ell \operatorname{sen}\varphi = \frac{\ell}{2}(m g \cos\varphi - k s \operatorname{sen}$$

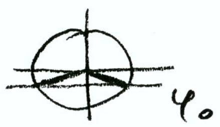
$$V_{ss} = k \qquad V_{s\varphi} = -\frac{1}{2} k \ell \operatorname{sen}\varphi \qquad V_{\varphi\varphi} = -\frac{\ell}{2}\left(m g \sin\varphi + k s \cos\varphi\right)$$

$\circledast \quad s = -\frac{\ell}{2}\cos\varphi$

$m g \cos\varphi + \frac{k\ell}{2}\cos\varphi\sin\varphi = 0 \quad \to \quad m g\left(1 + \frac{k\ell}{2 m g}\sin\varphi\right)\cos\varphi = 0$

(1) $\cos\varphi = 0$, $s = 0$ $\qquad \Gamma_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Gamma_2 = \left(0, \frac{3}{2}\pi\right)$

(2) $\sin\varphi = -\frac{2 m g}{k\ell} \qquad \exists$ per $k\ell > 2 m g$




$\varphi_0 = -\sin^{-1}\left(\frac{2 m g}{k\ell}\right) \qquad \cos\varphi_0 = \sqrt{1 - \frac{4 m^2 g^2}{k^2\ell^2}}$

$\Gamma_3 \equiv \left(-\frac{\ell}{2}\cos\varphi_0, \varphi_0\right) \qquad \Gamma_4 \equiv \left(\frac{\ell}{2}\cos\varphi_0, \pi - \varphi_0\right)$ NON ESISTONO per $k\ell = m g$

$H_1 = \begin{pmatrix} k & -k\ell/2 \\ -k\ell/2 & -m g\ell/2 \end{pmatrix} \qquad -\frac{m g k \ell}{2} - \frac{k^2\ell^2}{2} < 0$ INST. $\qquad \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \qquad \frac{8-3}{12}$

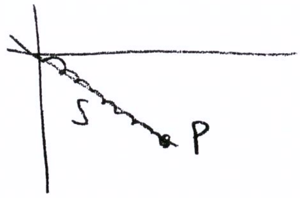
$H_2 = \begin{pmatrix} k & k\ell/2 \\ k\ell/2 & m g\ell/2 \end{pmatrix} \qquad \frac{m g k \ell}{2} - \frac{k^2\ell^2}{4} > 0 \qquad \frac{k\ell}{2} < m g \qquad -1$

---

In $\Gamma_2$: $\quad T = \begin{pmatrix} 2m & \frac{m\ell}{2} \\ \frac{m\ell}{2} & \frac{1}{3} m \ell^2 \end{pmatrix} \qquad |V - \lambda T| = \begin{vmatrix} k - 2m\omega^2 & \frac{k\ell}{2} - \frac{m\ell}{2}\omega^2 \\ \frac{k\ell}{2} - \frac{m\ell}{2}\omega^2 & \frac{m g \ell}{2} - \frac{m\ell^2}{3}\omega^2 \end{vmatrix} = 0$

$$(k - 2m\omega^2)\left(\frac{m g \ell}{2} - \frac{m\ell^2}{3}\omega^2\right) - \left(\frac{k\ell}{2} - \frac{m\ell}{2}\omega^2\right)^2 = 0 \qquad \text{etc.}$$

4) $\ell = 1$




$$T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2$$

$$V = -mgs\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} k s^2$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - \frac{1}{2} k s^2 + mgs\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = -ks + mg\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad m\ddot{s} + ks = mg\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

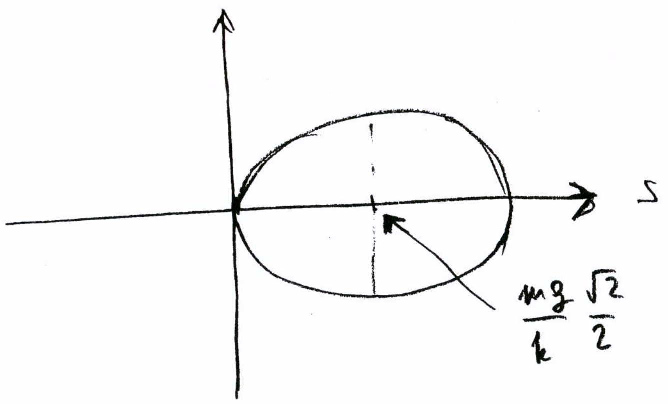
$$s(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{mg}{k}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\dot{s}(t) = \omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t)$$

$$\begin{cases} s(0) = A + \frac{mg}{k}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \dot{s}(0) = \omega B = 0 \end{cases} \qquad B = 0$$

$$\begin{cases} s(t) = \frac{mg}{k}\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \cos\omega t) \\ \dot{s}(t) = \omega\frac{mg}{k}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} s - \frac{mg}{k}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{mg}{k}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\omega t \\ \dot{s} = \omega\frac{mg}{k}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\omega t \end{cases}$$




$\frac{mg}{k}\frac{\sqrt{2}}{2}\omega$