

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione
Anno Accademico 2006/2007
Meccanica Razionale

Nome:

N. matr.:

Ancona, 15 dicembre 2006

1. Enunciare e dimostrare il teorema di König per l'energia cinetica T di un sistema di N punti materiali $\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ di masse rispettivamente m_1, m_2, \dots, m_N . Posto che l'energia cinetica del sistema può sempre essere scritta nella forma

$$T = \frac{1}{2} m_* v_*^2,$$

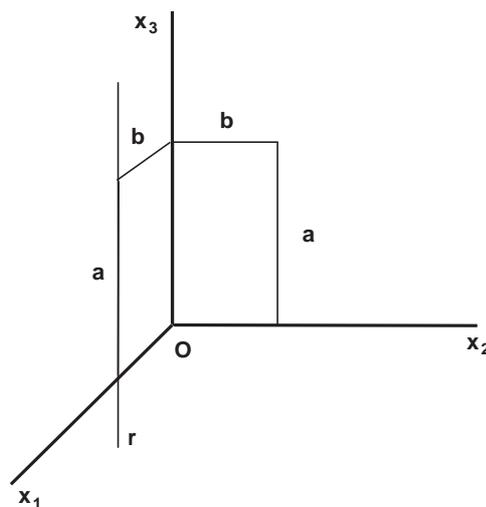
si chiede:

- (i) la scelta di m_* e v_* è unica oppure no?
(ii) nel caso in cui $m_i = m$, determinare il valore di v_* in termini della velocità del centro di massa v_0 , della massa totale M e della grandezza \bar{v} definita da

$$\bar{v}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N}$$

e con: (a) $m_* = m$; (b) $m_* = M$.

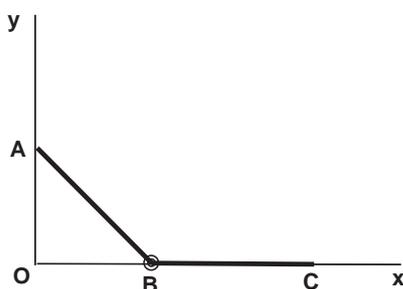
2. Enunciare e dimostrare il teorema di Huygens per il momento d'inerzia di un sistema rigido discreto rispetto ad un asse. In seguito:



- (i) Calcolare il momento d'inerzia di una lamina piana rettangolare di massa m e lati a e b , con $a > b$, rispetto alla retta su cui giace il lato più lungo;

(ii) utilizzando soltanto il risultato del punto precedente ed il teorema di Huygens, calcolare l'elemento I_{33} della matrice d'inerzia del sistema rigido in figura, costituito da due lamine rettangolari uguali, di massa m , e lati a e b , saldate ad angolo retto lungo il lato di lunghezza a . Calcolare inoltre il momento d'inerzia I_0 rispetto alla retta parallela all'asse x_3 e passante per il centro di massa ed il momento d'inerzia I_r rispetto alla retta r , parallela all'asse x_3 ed indicata in figura.

3. Un sistema rigido si muove nel piano verticale $O(x, y)$ ed è costituito da due aste AB e BC di ugual lunghezza l ed ugual massa m , incernierate nell'estremo comune B . Gli estremi B e C dell'asta BC sono vincolati a scorrere sull'asse x , mentre l'asta AB ha l'estremo A vincolato a scorrere sull'asse y . Si chiede di:



- (i) scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema;
(ii) calcolare le reazioni vincolari interne ed esterne nella configurazione con l'asta AB disposta lungo l'asse x , nell'ipotesi che all'istante iniziale l'asta AB formi un angolo di $\pi/4$ con l'asse y ed abbia atto di moto nullo.

Suggerimento: si rappresentino le reazioni vincolari esterne sull'asta BC con due vettori applicati agli estremi dell'asta.

4. Un punto materiale di massa m si muove su un piano dove agisce una forza conservativa derivante dal potenziale

$$V(r, \varphi) = V_0 \frac{r^2}{a^2} e^{-r^2/a^2} \cos \varphi,$$

dove r e φ sono le coordinate polari piane, mentre a e V_0 sono numeri reali positivi. Si chiede di:

- (i) determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità;
(ii) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.