Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale - Sede di Fermo
Anno Accademico 2009/2010
Matematica 2
Esercizi d'esame

Nome ....

N. Matricola .... Fermo, gg/mm/aaaa

1. Stabilire l'ordine di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali e dire quali sono lineari (e quali no) e quali sono omogenee (e quali no),
$$\begin{aligned} &y''' + x^2\, y = 2x \\ &y' + y^2 = 0 \\ &y^{IV} - 2\, y = 0 \\ &y' + \sin y = 1, \end{aligned}$$
dove $y = y(x)$ è la funzione incognita. Dire inoltre quante soluzioni linearmente indipendenti ammette ciascuna di esse e di quante condizioni ausiliarie abbisognano per avere una soluzione unica.

2. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\boxed{y' = y^2\, \cos x}$ per la funzione incognita $y = y(x)$. Determinare quindi la soluzione particolare con la condizione iniziale $y(0) = 1$ e stabilire il dominio in cui tale soluzione è definita.

3. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\boxed{y' = x\, y + x}$ per la funzione incognita $y = y(x)$. Determinare quindi la soluzione particolare con la condizione iniziale $y(0) = 1$.

4. È data l'equazione differenziale del second'ordine $\boxed{2y'' + 3y' + y = \cos x}$ per la funzione incognita $y = y(x)$. Scrivere l'equazione omogenea associata, determinarne due soluzioni linearmente indipendenti e scriverne la soluzione generale. Trovare quindi una soluzione particolare dell'equazione non omogenea e risolvere il problema di Caucy aggiungendo le condizioni iniziali $\boxed{y(0) = 1,\, y'(0) = 2}$.

5. Dare la definizione di curva semplice, curva piana, curva chiusa e curva regolare.

6. Classificare le seguenti curve nel piano (aperte o chiuse, semplici o meno, regolari o meno), qui date in rappresentazione parametrica:
$$\begin{array}{lll} (a) & (x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin^2 t), & 0 \le t \le \pi \\ (b) & (x(t) = \sin t,\ y(t) = \sin 2t), & 0 \le t \le \pi \\ (c) & (x(t) = t^2,\ y(t) = \sin t), & -\pi \le t \le \pi \\ (d) & (x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t), & 0 \le t \le 2\pi \end{array}$$

7. Calcolare la lunghezza d'arco nei casi (a), (c) e (d) dell'esercizio precedente.

8. Calcolare l'integrale di prima specie

$$\int_\gamma f\,ds$$

dove $\gamma = (\cos t, \sin t)$ e $f(x,y) = x\,y^2$.

9. Dire quando una funzione è derivabile e quando è differenziabile in un punto (x_0, y_0).

10. Dare la definizione di derivata direzionale di una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$, in un punto $\mathbf{x} \in D$ rispetto ad un versore $\widehat{\mathbf{v}}$.

11. Definire il gradiente di una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$, in un punto $\mathbf{x} \in D$ e stabilire la relazione con la derivata direzionale, evidenziando le condizioni sotto le quali vale tale relazione.

12. Calcolare le derivate direzionali, $D_{\widehat{\mathbf{v}}} f(x_0, y_0)$ delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{lll}
(a) \quad f(x,y) = x^2 - y^2, & (x_0,y_0) = (0,1), & \widehat{\mathbf{v}} = (1,0) \\
(b) \quad f(x,y) = e^{x^2+y^2}, & (x_0,y_0) = (0,0), & \widehat{\mathbf{v}} = (1,1)/\sqrt{2} \\
(c) \quad f(x,y) = \sin x\, \cos y + \cos x\, \sin y, & (x_0,y_0) = (0,1), & \widehat{\mathbf{v}} = (-1,1)/\sqrt{2} \\
(d) \quad f(x,y) = \cos^2 x - \sin^2 y, & (x_0,y_0) = (0,1), & \widehat{\mathbf{v}} = (-1,-1)/\sqrt{2}
\end{array}$$

13. Determinare i punti critici delle funzioni

$$f(x,y) = x^2 y - xy^2 + x$$
$$f(x,y) = \sin x\, \cos^2 y$$
$$f(x,y) = x\,y\,e^{-x^2-y^2}$$

e stabilirne la natura mediante lo studio della matrice hessiana.

14. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle funzioni dell'esercizio precedente nel punto $(0,0)$.

15. Per le funzioni dell'esercizio precedente, determinare per quali valori di c l'equazione $f(x,y) = c$ fornisce una curva di livello regolare.

16. Per ciascuna delle funzioni dell'esercizio precedente, stabilire per quali punti (x_0, y_0) l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$.

17. Illustrare la classificazione delle forme quadratiche (definite positive, definite negative, etc.); enunciare e dimostrare le condizioni sulla matrice associata che corrispondono ai vari tipi di forme quadratiche introdotte nella classificazione.

18. Che cos' un'orbita di fase? Che cos' un ciclo? Che cos' un punto di equilibrio?

19. Dei seguenti sistemi di equazioni differenziali, dire quali sono autonomi (e quali no) e quali sono lineari (e quali no):

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= 2\,y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\,y_1 + 3\,y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_1^2 + y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\,y_1 + \sin y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= t\,y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_1 - y_2 \end{cases}$$

20. Classificare il punto critico nell'origine dei seguenti sistemi autonomi:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= 2\,y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\,y_1 + 3\,y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_1 + 2\,y_2 \\ \dot{y}_2 &= 5\,y_1 - 2\,y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= -4\,y_1 - y_2 \\ \dot{y}_2 &= 2\,y_1 - 2\,y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + 3\,y_2 \end{cases}$$

Per ciascuno di essi, dire se esistono altri punti critici.

21. Considerare i sistemi autonomi proposti nel file "Sistemi" e disegnare qualitativamente, per ciascuno di essi, il ritratto di fase.

22. Si consideri la superficie $z = f(x,y)$, grafico della funzione $f(x,y) = x\,y^2$ e se ne determini

    (a) una rappresentazione parametrica nelle variabili (t,u);

    (b) la matrice jacobiana;

    (c) il versore normale;

    (d) l'elemento d'area;

    (e) una rappresentazione grafica approssimativa.

23. Si consideri l'elissoide centrato nell'origine, con i semiassi disposti lungo gli assi coordinati e di lunghezza $(1,2,1)$; se ne determini

    (a) una rappresentazione parametrica nelle variabili (t,u);

    (b) la matrice jacobiana;

    (c) il versore normale;

    (d) l'elemento d'area;

(e) una rappresentazione grafica approssimativa.

24. Si consideri la superficie $z = f(x, y)$, grafico della funzione $f(x, y) = \sin x$ e se ne determini

    (a) una rappresentazione parametrica nelle variabili (t, u);

    (b) la matrice jacobiana;

    (c) il versore normale;

    (d) l'elemento d'area;

    (e) una rappresentazione grafica approssimativa.

25. Verificare la regolarità delle seguenti trasformazioni di coordinate nel piano:

$$\begin{cases} x &= u\,v \\ y &= u^2 - v^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= u - v \\ y &= u^2 + v^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= u + v \\ y &= u - v^2 \end{cases}$$

e determinare le curve coordinate.

26. Si considerino i campi vettoriali

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$$
$$\mathbf{H}(x, y, z) = (x, y, z).$$

Determinare il dominio naturale in cui sono definiti e dire se sono conservativi o meno, spiegandone la ragione. Calcolare quindi il lavoro compiuto da ciascun campo lungo la curva costituita dai tre quarti di cerchio di centro l'origine e situati nel primo quadrante, rispettivamente sul piano $O(x, y)$, $O(y, z)$ e $O(x, z)$.

27. Dare la definizione di dominio normale rispetto ad x e rispetto ad y.

28. Dire se i seguenti domini sono normali:

    - $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
    - $D = D_1 \bigcup D_2$, dove $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ e $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 0\}$

29. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \left(x^2 + 2\,y^2\right) dx\,dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$.

30. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \left(x^2 + 2\,y^2\right) dx\,dy$$

dove D è il cerchio di centro l'origine e raggio unitario.

31. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \left(x + \sqrt{1-y}\right) dx\,dy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$.

32. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \left(y + \sqrt{1+x}\right) dx\,dy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le x+1\}$.

33. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D (|x| + |y|)\, dx\,dy$$

dove D è il cerchio di centro l'origine e raggio unitario.

34. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x\,y\,dx\,dy$$

dove D è il dominio costituito dall'unione dei due quadrati $\{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ e $\{(x,y) : -1 \le x \le 0,\ -1 \le y \le 0\}$ e dai due quarti di cerchio di raggio $R = 1$, centro l'origine e situati nel secondo e quarto quadrante.

35. Sia S la semisfera superiore di raggio $R = 3$ e centro l'origine. Calcolare l'integrale di superficie

$$I = \int\int_S y^2 z\,dS$$

36. Sia S la semisfera inferiore di raggio $R = 2$ e centro l'origine. Calcolare l'integrale di superficie

$$I = \int\int_S yz^2\,dS$$

37. Sia S la superficie cilindrica di raggio $R = 2$ e centro l'origine. Calcolare l'integrale di superficie

$$I = \int\int_S y^2 z\,dS$$

38. Sia S la superficie cilindrica di raggio $R = 1$ e centro l'origine. Calcolare l'integrale di superficie
$$I = \int \int_S x^2 z \, dS$$

39. Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale dato da $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -z, -x)$. Calcolare il flusso del rotore attraverso il quarto di superficie cilindrica di raggio R ed altezza h situato nel primo ottante; eseguire il calcolo diretto e la verifica con il teorema di Stokes.

40. Sia S la superficie del cubo unitario $\{(y, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ e sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale dato da $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$. Calcolare il flusso uscente del campo $\mathbf{F}$ attraverso la superficie S, sia eseguendo il calcolo diretto sia usando il teorema della divergenza.

41. Calcolare il flusso del campo vettoriale dato da $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ attraverso la superficie di un cono circolare retto di raggio R ed altezza h, avente la base sul piano $O(x, y)$ e l'altezza lungo l'asse z. Calcolare il flusso uscente del campo sia eseguendo il calcolo diretto sia usando il teorema della divergenza.

42. Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale dato da $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ attraverso la superficie laterale di un cono circolare retto di raggio R ed altezza h, avente la base sul piano $O(x, y)$ e l'altezza lungo l'asse z. Calcolare il flusso sia eseguendo il calcolo diretto sia usando il teorema del rotore.

43. Enunciare il teorema della divergenza.

44. Enunciare il teorema del rotore.

45. Si considerino le funzioni periodiche
$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x \\ g(x) &= |\sin x| \\ u(x) &= \cos^2 x \\ v(x) &= |\cos x|. \end{aligned}$$
Determinare il loro periodo e scriverne le serie di Fourier.

46. Scrivere la serie di Fourier delle funzioni
$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ g(x) &= x \sin x \\ u(x) &= x \cos x, \end{aligned}$$
definite nell'intervallo $[0, 2\pi]$ ed estese per ripetizione periodica nella parte rimanente della retta reale.

47. Introdurre la definizione di trasformata ed antitrasformata di Laplace, indicando che cos'è l'ascissa di convergenza.

48. Enunciare e dimostrare la formula per la trasformata di Laplace delle derivate.

49. Introdurre la definizione di trasformata ed antitrasformata di Fourier.

50. Enunciare e dimostrare la formula per la trasformata di Fourier delle derivate.

51. Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni:

$$f(x) = 5\,\sin(3x)$$
$$f(x) = \cos(x/2)$$
$$f(x) = \frac{x^4}{3}$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\,e^{-5t}$$

52. Calcolare l' antitrasformata di Laplace delle seguenti funzioni:

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{p-4}$$
$$\tilde{f}(p) = \frac{3}{p+1}$$
$$\tilde{f}(p) = \frac{4}{p}$$
$$\tilde{f}(p) = \frac{2}{p^2+3}$$
$$\tilde{f}(p) = \frac{4p}{9p^2+4}$$
$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{p^3}$$
$$\tilde{f}(p) = \frac{5}{p^4}$$

53. Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \le a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \le a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$