Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale - Sede di Fermo
Anno Accademico 2009/2010
Matematica 2
Primo appello estivo

Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 1/07/2010

1. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\boxed{y' = y^2 \sin x}$ per la funzione incognita $y = y(x)$. Determinare quindi la soluzione particolare con la condizione iniziale $y(0) = 1$ e stabilire il dominio in cui tale soluzione è definita.

2. Dare la definizione di curva semplice, curva piana, curva chiusa e curva regolare.

3. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle funzioni

$$f(x,y) = x^2y - xy^2 + x$$
$$f(x,y) = \sin x \cos^2 y$$
$$f(x,y) = x\,y\,e^{-x^2-y^2}$$

4. Per le funzioni dell'esercizio precedente, determinare per quali valori di c l'equazione $f(x,y) = c$ fornisce una curva di livello regolare.

5. Si consideri la superficie $z = f(x,y)$, grafico della funzione $f(x,y) = x^2\,y$ e se ne determini

   (a) una rappresentazione parametrica nelle variabili (t,u);

   (b) la matrice jacobiana;

   (c) il versore normale;

   (d) l'elemento d'area;

   (e) una rappresentazione grafica approssimativa.

6. Verificare la regolarità delle seguenti trasformazioni di coordinate nel piano:

$$\begin{cases} x &= u/v \\ y &= u^2 - v^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= u + v \\ y &= u^2 + v^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= u - v \\ y &= u^2 + v \end{cases}$$

e determinare le curve coordinate.

7. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \left(y + \sqrt{x}\right) dx\, dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x + 1\}$.

8. Sia S la semisfera superiore di raggio $R = 3$ e centro l'origine. Calcolare l'integrale di superficie

$$I = \int\int_S x^2 z^2\, dS$$

9. Sia S la superficie del cubo unitario $\{(y, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ e sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale dato da $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -2\,y, -z)$. Calcolare il flusso uscente del campo $\mathbf{F}$ attraverso la superficie S, sia eseguendo il calcolo diretto sia usando il teorema della divergenza.

10. Si considerino le funzioni periodiche

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 2\,x \\ g(x) &= |\sin 2\,x| \\ u(x) &= \cos^2 2\,x \\ v(x) &= |\cos 2\,x|. \end{aligned}$$

Determinare il loro periodo e scriverne le serie di Fourier.

11. Enunciare e dimostrare la formula per la trasformata di Laplace delle derivate.

12. Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} |x - a|, & |x| \leq 2a \\ 0, & |x| > 2a \end{cases}$$