Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale - Sede di Fermo
Anno Accademico 2009/2010
Matematica 2
Primo appello estivo

Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 18/06/2010

1. Stabilire l'ordine di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali e dire quali sono lineari (e quali no) e quali sono omogenee (e quali no),

$$\begin{aligned} &y^{IV} + (x-1)\,y = 2x^2 \\ &y'' + y = 0 \\ &y''' - 2\,y = 0 \\ &y' + x\,\sin y = 1, \end{aligned}$$

dove $y = y(x)$ è la funzione incognita. Dire inoltre quante soluzioni linearmente indipendenti ammette ciascuna di esse e di quante condizioni ausiliarie abbisognano per avere una soluzione unica.

2. È data l'equazione differenziale del second'ordine $\boxed{2y'' + 3y' - 2y = \cos x}$ per la funzione incognita $y = y(x)$. Scrivere l'equazione omogenea associata, determinarne due soluzioni linearmente indipendenti e scriverne la soluzione generale. Trovare quindi una soluzione particolare dell'equazione non omogenea e risolvere il problema di Caucy aggiungendo le condizioni iniziali $\boxed{y(0) = 1,\ y'(0) = 2}$.

3. Classificare le seguenti curve nel piano (aperte o chiuse, semplici o meno, regolari o meno), qui date in rappresentazione parametrica:

$$\begin{array}{lll} (a) & (x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin^2 t), & 0 \le t \le \pi \\ (c) & (x(t) = t^2,\ y(t) = \sin t), & -\pi \le t \le \pi \end{array}$$

4. Definire il gradiente di una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$, in un punto $\mathbf{x} \in D$ e stabilire la relazione con la derivata direzionale, evidenziando le condizioni sotto le quali vale tale relazione.

5. Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^3y - xy^2 + x$$

e stabilirne la natura mediante lo studio della matrice hessiana.

6. Dei seguenti sistemi di equazioni differenziali, dire quali sono autonomi (e quali no) e quali sono lineari (e quali no):

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_1 - y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_1 - 2\,y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_1 + y_2^2 \\ \dot{y}_2 &= -\,y_1 + \cos y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_1 - t\,y_2 \end{cases}$$

7. Classificare il punto critico nell'origine dei seguenti sistemi autonomi:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= 3\,y_1 - y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\,y_1 + 2\,y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= -y_1 + 4\,y_2 \\ \dot{y}_2 &= 3\,y_1 - 2\,y_2 \end{cases}$$

   Per ciascuno di essi, dire se esistono altri punti critici.

8. Dire se i seguenti domini sono normali:

   - $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
   - $D = D_1 \bigcup D_2$, dove $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ e $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 0\}$

9. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x^2\,y\,dx\,dy$$

   dove D è il dominio triangolare di vertici i punti $A = (0,0)$, $B = (0,1)$ e $C = (1,1)$.

10. Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale dato da $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2 - z, -x - z, x + y)$ attraverso la superficie laterale di un tronco di cono circolare retto di raggi di base R_1 ed R_2, con $R_1 < R_2$, ed altezza h, avente la base sul piano $O(x,y)$ e l'altezza lungo l'asse z. Calcolare il flusso sia eseguendo il calcolo diretto sia usando il teorema del rotore.

11. Enunciare il teorema del rotore.

12. Calcolare la trasformata di Laplace della funzione $f(x) = \cos(x - \pi)$.